Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen II
Vorlesung am 04.12.2012

Algorithmische Geometrie: Konvexe Hülle

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Die konvexe Hülle einer Punktmenge

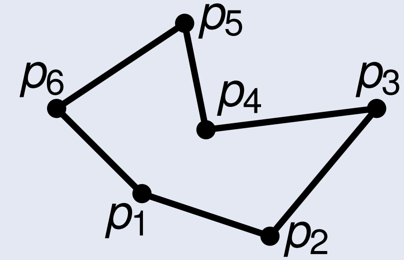
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Polygone

Karlsruher Institut für Technologie

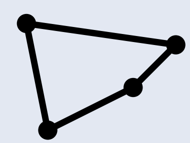
Definition: Polygon **(Definition 6.7)**

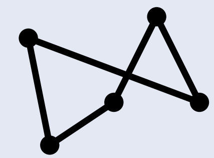
Ein *Polygon* ist durch eine Folge von Punkten $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ gegeben; die p_i sind in der Reihenfolge ihres Auftretens auf dem Rand induziert. $\overline{p_i p_{i+1}}$ heißt (i modulo n)-te Polygonkante.



Definition: Einfache Polygone **(Definition 6.8)**

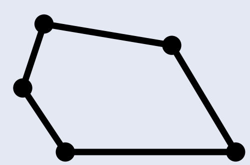
Ein Polygon heißt *einfach*, wenn sich keine zwei Polygonkanten schneiden (außer an gemeinsamen Endpunkten).

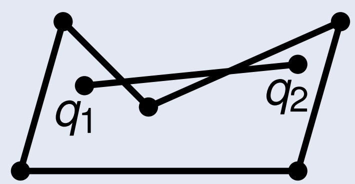

einfach


nicht einfach

Definition: Konvexe Polygone **(Definition 6.9)**

Ein Polygon P heißt *konvex* genau dann wenn für je zwei Punkte q_1, q_2 im Inneren von P gilt, dass die Strecke $\overline{q_1 q_2}$ vollständig im Inneren von P liegt.


konvex



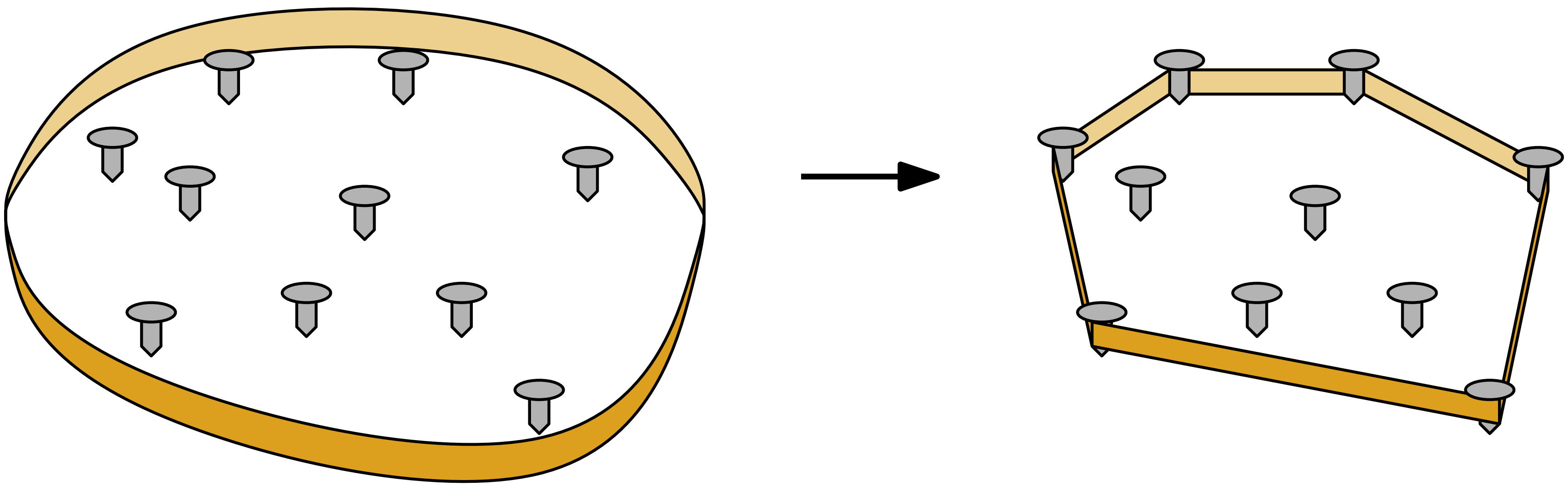
nicht konvex

Bemerkung:
Wir zählen die Polygonkanten (also den Rand) zum Inneren eines Polygons.

Konvexe Hülle

Problem: Konvexe Hülle
Gegeben sind $n \geq 3$ Punkte $Q = \{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$. Berechne die *konvexe Hülle* $H(Q)$, d.h. das minimale konvexe Polygon, das alle Punkte in Q im Inneren enthält.

Intuition: Fasse jeden Punkte als Nagel auf, ziehe ein Gummiband über alle Nägel und lasse es los.



Wir werden zwei Algorithmen behandeln, die die konvexe Hülle von n Punkten in $O(n \log n)$ bzw. $O(hn)$ bestimmen, wobei h die Anzahl der Eckpunkte der konvexen Hülle ist.

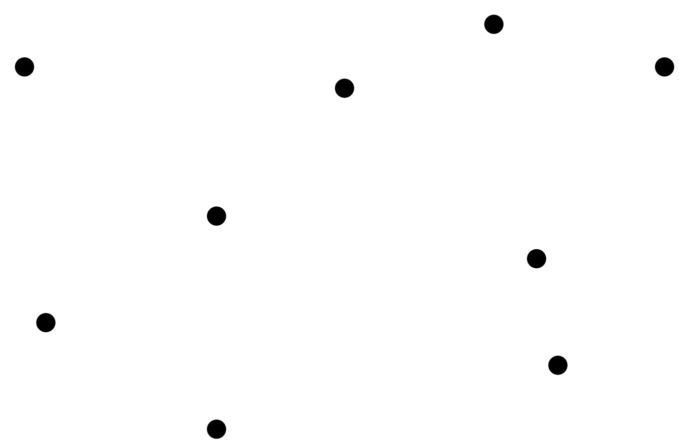
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

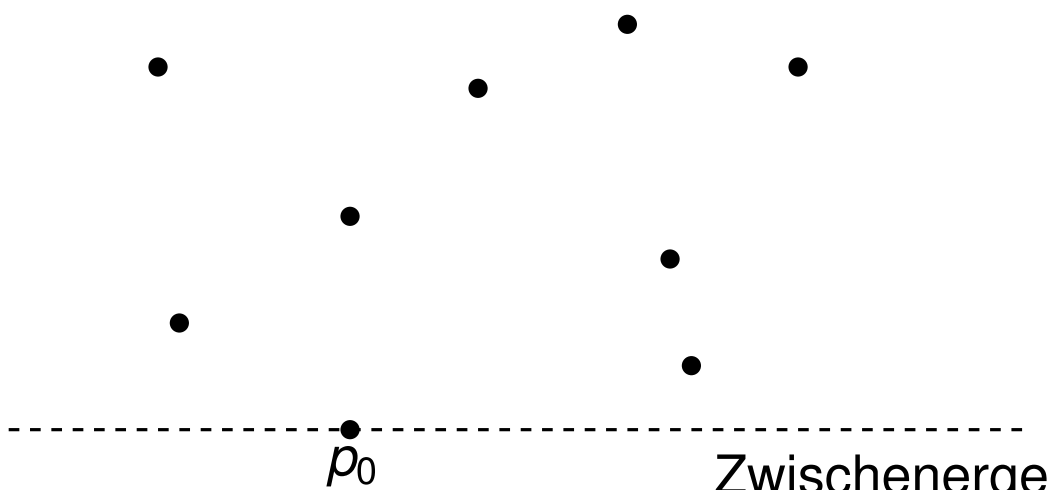
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle: p_0

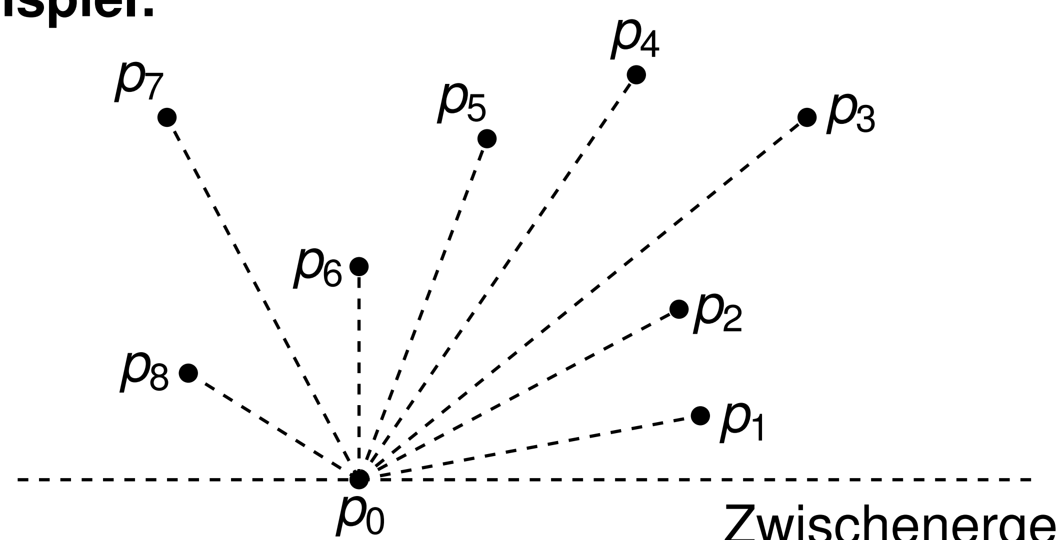
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle: p_0

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

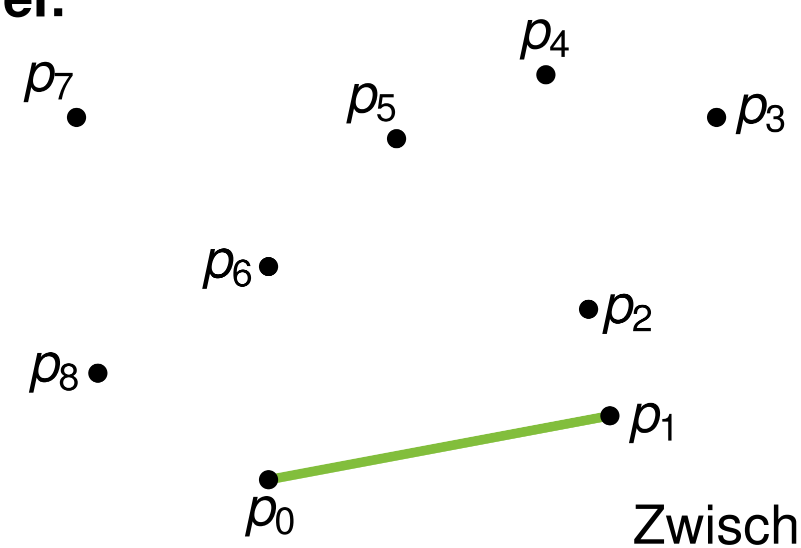
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle: p_1 p_0

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

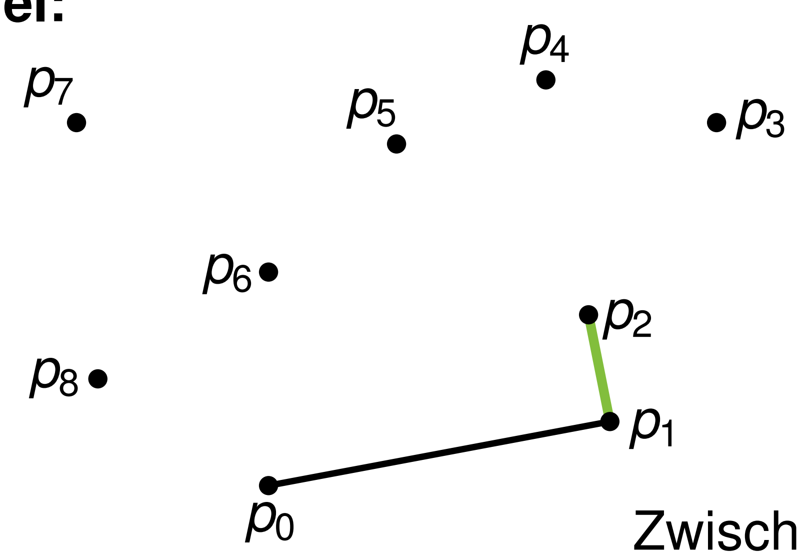
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle: p_2 / p_1 / p_0

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

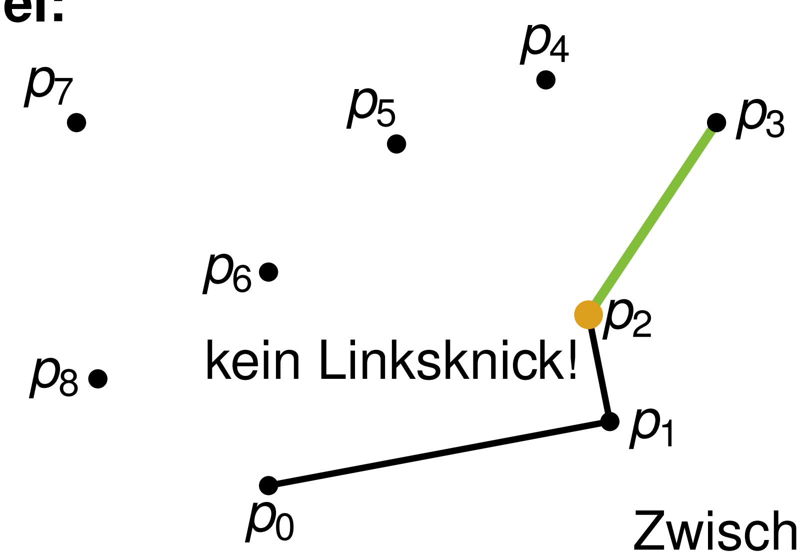
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle: p_3, p_2, p_1, p_0

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

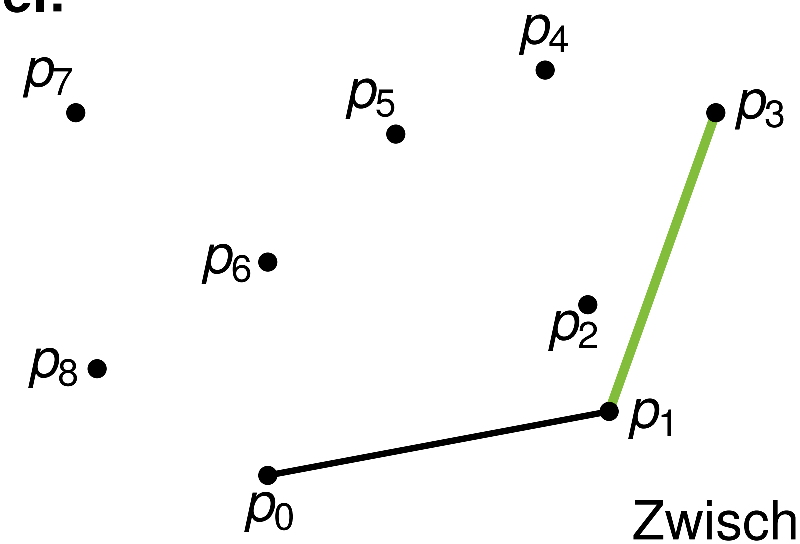
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle: p_3, p_1, p_0

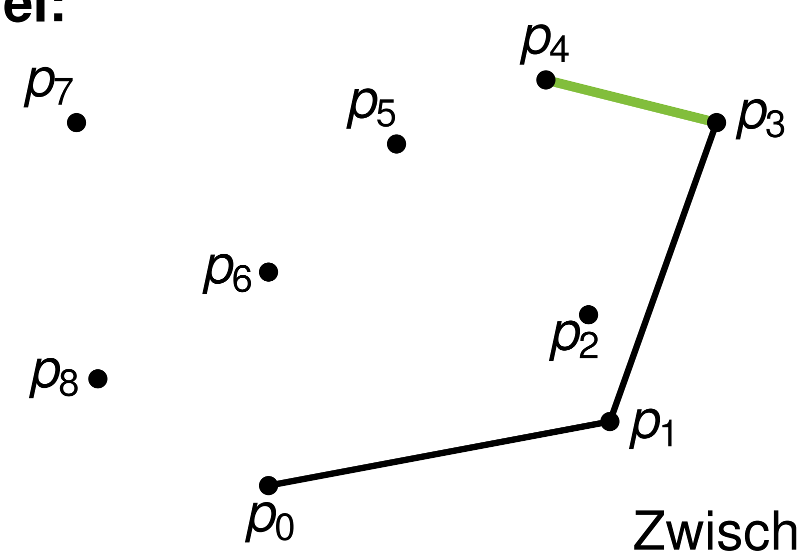
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_4
p_3
p_1
p_0

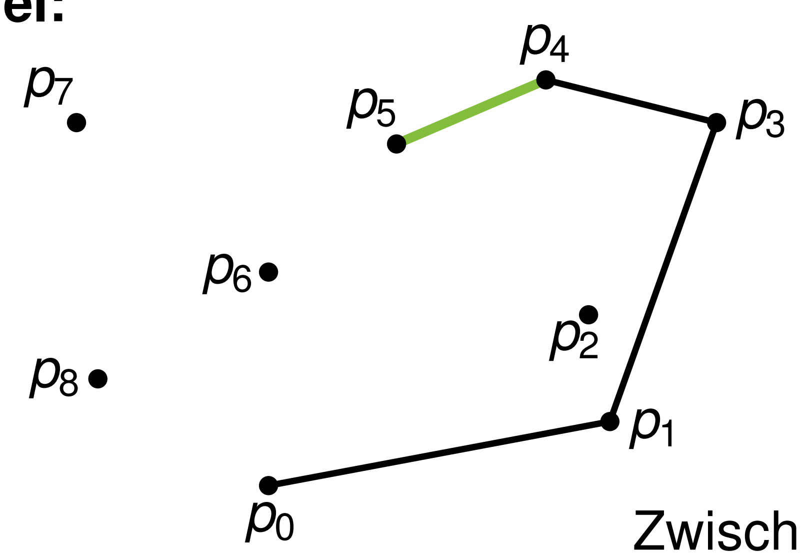
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle: p_5 p_4 p_3 p_1 p_0

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

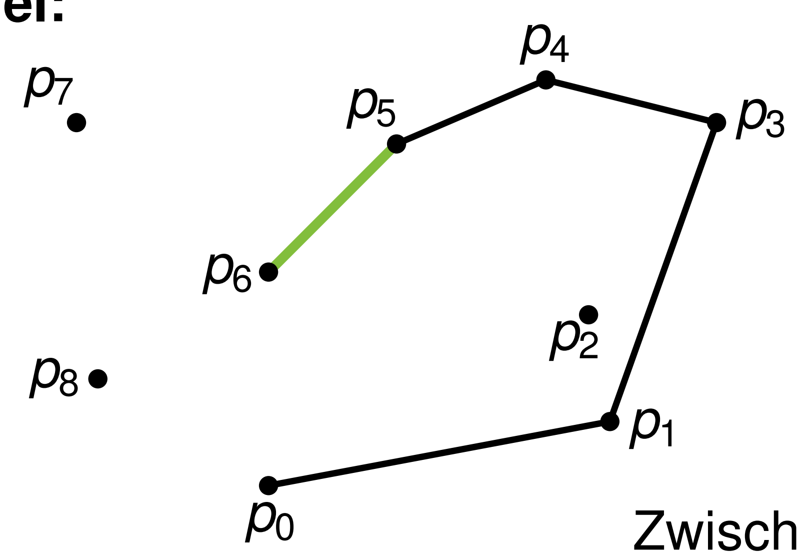
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle: p_6 p_5 p_4 p_3 p_1 p_0

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

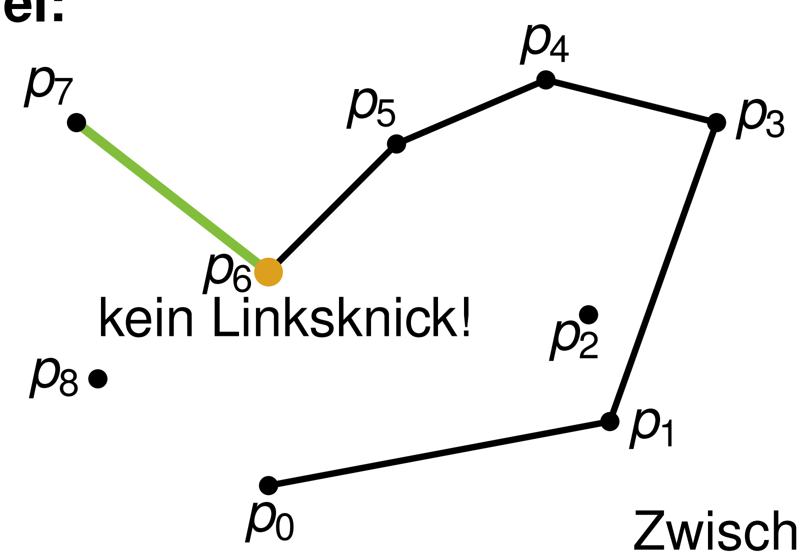
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_7
p_6
p_5
p_4
p_3
p_1
p_0

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

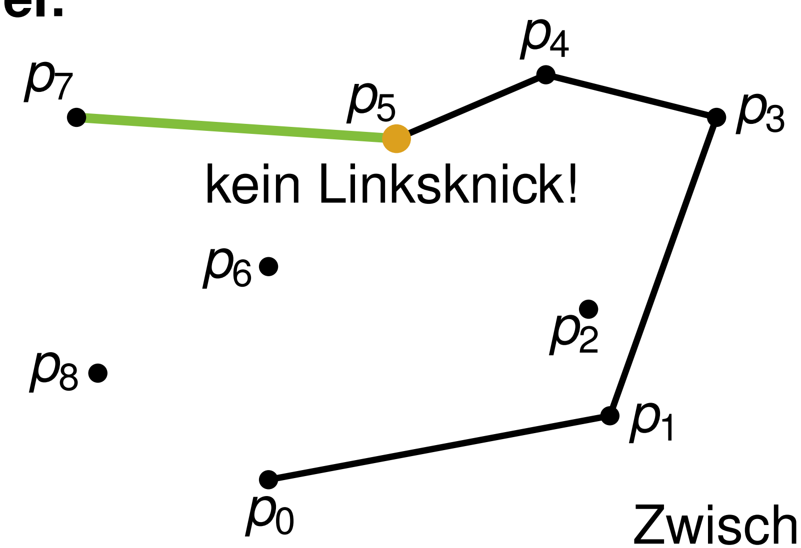
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_7
p_5
p_4
p_3
p_1
p_0

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

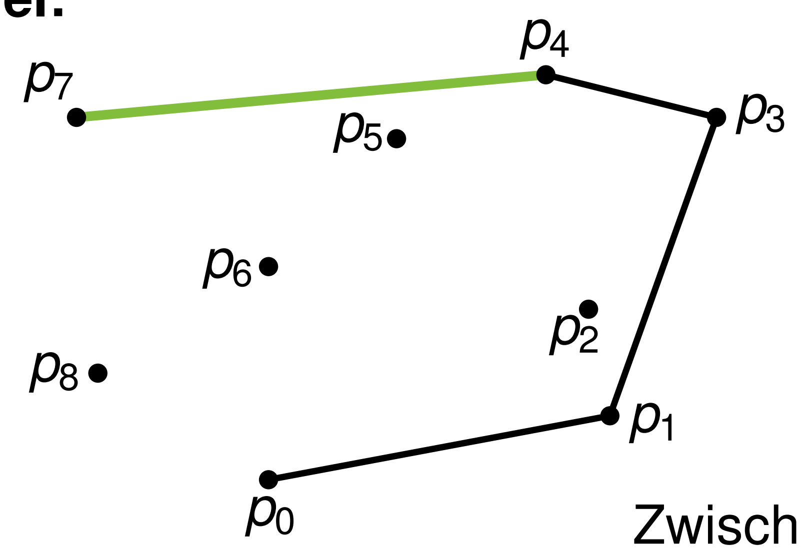
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle: p_7 p_4 p_3 p_1 p_0

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

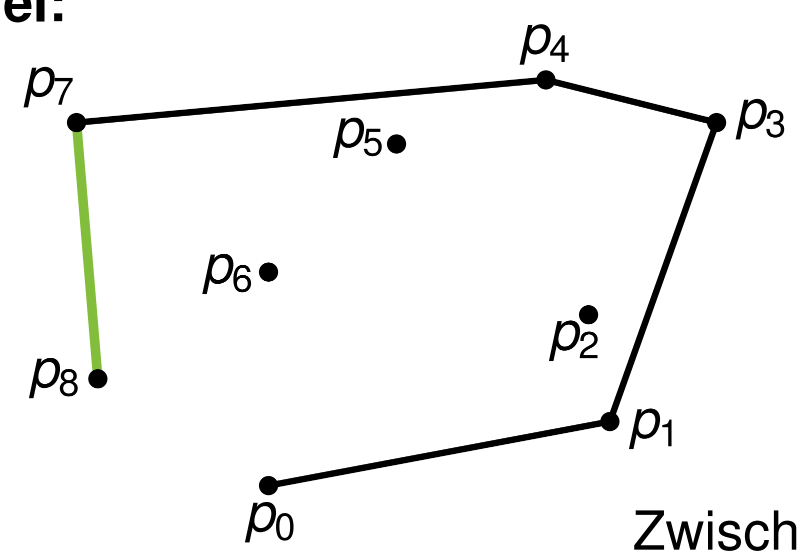
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_8
p_7
p_4
p_3
p_1
p_0

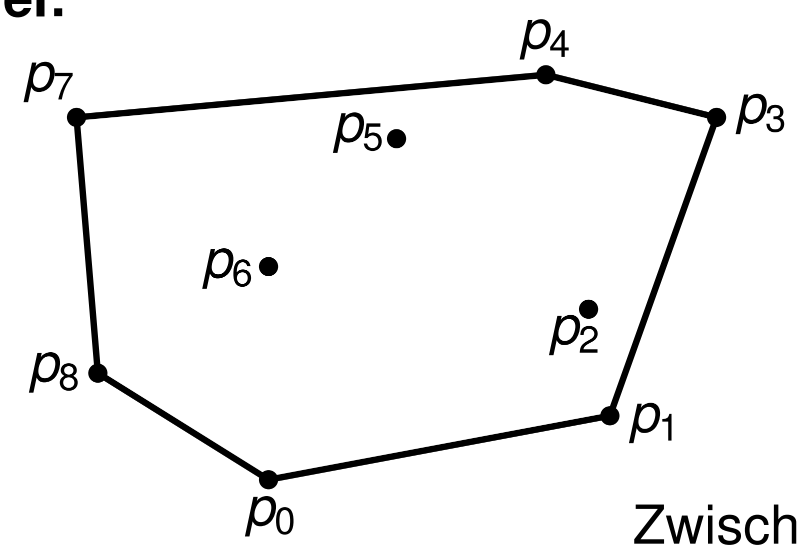
Der Graham Scan (1972)

Idee:

1. Bestimme untersten Punkte p_0 (falls nicht eindeutig, dann den Linkesten).
2. Ordne die restlichen Punkte p_i nach dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$.
3. Durchlaufe die Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ in dieser Reihenfolge und konstruiere sukzessive die konvexe Hülle $H(Q)$ nach folgender Regel:

   Wird beim Durchlaufen der Strecken $\overline{p_i p_j}$ und $\overline{p_j p_k}$ nicht links abgebogen, so ist p_j nicht aus dem Rand von $H(Q)$.

Beispiel:



Zwischenergebnis für die konvexe Hülle:

p_8
p_7
p_4
p_3
p_1
p_0

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Der Graham Scan (1972)

Karlsruher Institut für Technologie

GRAHAM SCAN(Q)

$S \leftarrow$ leerer Stack — Initialisierung $O(n \log n)$

$p_0 \leftarrow$ Punkt in Q mit kleinster y-Koord. (falls uneindeutig, den mit kleinster x-Koord.).

$\langle p_1, \ldots, p_m \rangle \leftarrow$ Die restlichen Punkte sortiert gemäß dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$ (bei mehreren mit gleichem Winkel entferne alle bis auf den Entferntesten).

PUSH(p_0, S), PUSH(p_1, S), PUSH(p_2, S)

eigentlicher Algorithmus

for $i = 3$ **to** m **do**
    while *Strecken* $\overline{\text{NEXT-TO-TOP}(S)\text{TOP}(S)}$ *und* $\overline{\text{TOP}(S) p_i}$ *bilden keinen Linksknick* **do**
        POP(S)
    PUSH(p_i,S)
gib S aus

Der Graham Scan (1972)

GRAHAM SCAN(Q)

$S \leftarrow$ leerer Stack — Initialisierung $O(n \log n)$

$p_0 \leftarrow$ Punkt in Q mit kleinster y-Koord. (falls uneindeutig, den mit kleinster x-Koord.).

$\langle p_1, \ldots, p_m \rangle \leftarrow$ Die restlichen Punkte sortiert gemäß dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$ (bei mehreren mit gleichem Winkel entferne alle bis auf den Entferntesten).

PUSH(p_0, S), PUSH(p_1, S), PUSH(p_2, S)

eigentlicher Algorithmus

for $i = 3$ **to** m **do**

  while *Strecken* $\overline{\text{NEXT-TO-TOP}(S)\text{TOP}(S)}$ *und* $\overline{\text{TOP}(S)p_i}$ *bilden keinen Linksknick* **do**

    POP(S)

  amortisiert $O(1)$

  PUSH(p_i,S)

gib S aus

Der Graham Scan (1972)

GRAHAM SCAN(Q) $O(n \log n)$

$S \leftarrow$ leerer Stack — Initialisierung $O(n \log n)$

$p_0 \leftarrow$ Punkt in Q mit kleinster y-Koord. (falls uneindeutig, den mit kleinster x-Koord.).

$\langle p_1, \ldots, p_m \rangle \leftarrow$ Die restlichen Punkte sortiert gemäß dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$ (bei mehreren mit gleichem Winkel entferne alle bis auf den Entferntesten).

PUSH(p_0, S), PUSH(p_1, S), PUSH(p_2, S)

for $i = 3$ **to** m **do** — eigentlicher Algorithmus $O(n)$

  while *Strecken* $\overline{\text{NEXT-TO-TOP}(S)\text{TOP}(S)}$ *und* $\overline{\text{TOP}(S) p_i}$ *bilden keinen Linksknick* **do**

    POP(S) — amortisiert $O(1)$

  PUSH(p_i, S)

gib S aus

Satz: Graham Scan

Der Graham Scan berechnet die konvexe Hülle $H(Q)$ von Q in $O(n \log n)$ Zeit.

Der Graham Scan (1972)

GRAHAM SCAN(Q) $O(n \log n)$

$S \leftarrow$ leerer Stack — Initialisierung $O(n \log n)$

$p_0 \leftarrow$ Punkt in Q mit kleinster y-Koord. (falls uneindeutig, den mit kleinster x-Koord.).

$\langle p_1, \ldots, p_m \rangle \leftarrow$ Die restlichen Punkte sortiert gemäß dem Winkel zwischen der Horizontalen durch p_0 und $\overline{p_0 p_i}$ (bei mehreren mit gleichem Winkel entferne alle bis auf den Entferntesten).

PUSH(p_0, S), PUSH(p_1, S), PUSH(p_2, S)

for $i = 3$ **to** m **do** — eigentlicher Algorithmus $O(n)$

  while *Strecken* $\overline{\text{NEXT-TO-TOP}(S)\text{TOP}(S)}$ *und* $\overline{\text{TOP}(S)p_i}$ *bilden keinen Linksknick* **do**

    POP(S) — amortisiert $O(1)$

  PUSH(p_i,S)

gib S aus

Satz: Graham Scan

Der Graham Scan berechnet die konvexe Hülle $H(Q)$ von Q in $O(n \log n)$ Zeit.

Beweis: Zeige die folgenden beiden Invarianten:

1. Wird ein Punkt von S entfernt (POP(S)), so ist er nicht Eckpunkt von $H(Q)$.
2. Der aktuelle Inhalt von S bestimmt stets ein konvexes Polygon.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Eine untere Schranke

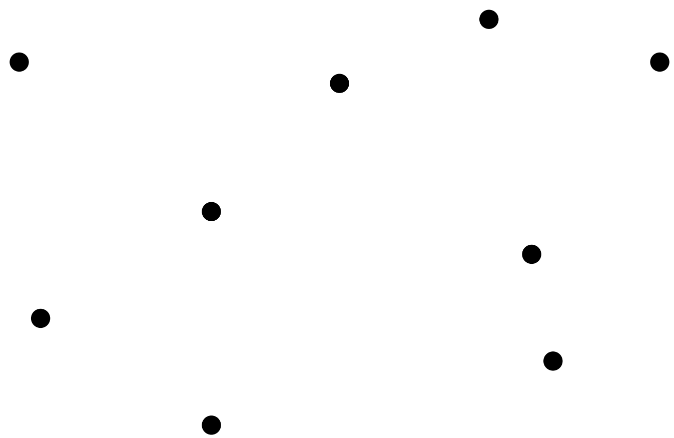
Satz: Untere Schranke
Die Laufzeit zur Berechnung der konvexen Hülle einer Menge von n Punkten ist in $\Theta(n \log n)$. (d.h. es gibt keinen Algorithmus mit Laufzeit $o(n \log n)$)

Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March)

Idee:

1. Berechne zwei Teile der konvexen Hülle getrennt: Pfad vom untersten Punkt p_0 der Konvexen Hülle zum Obersten („Rechtskette") und dann Pfad vom Obersten zum Untersten („Linkskette").
2. Berechnung der „Rechtskette": Wähle p_{i+1} sodass der Winkel zwischen der Horizontalen (nach rechts) durch p_i und der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ minimal ist.
3. Berechnung der „Linkskette": Analog von oben nach unten.

Beispiel:

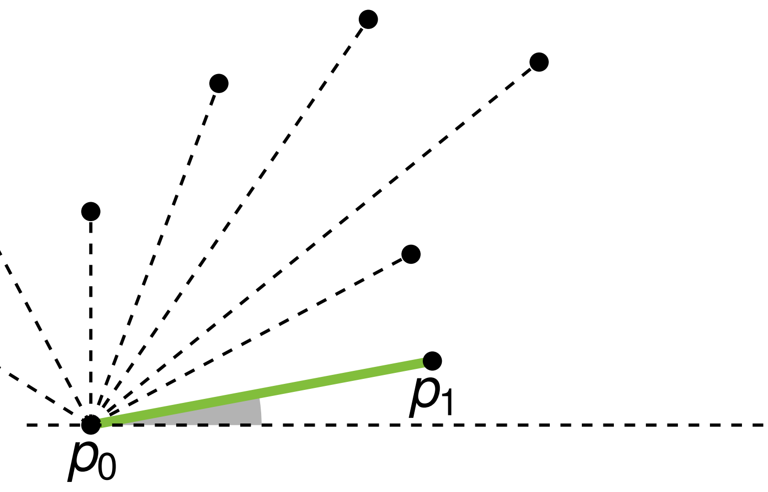


Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March)

Idee:

1. Berechne zwei Teile der konvexen Hülle getrennt: Pfad vom untersten Punkt p_0 der Konvexen Hülle zum Obersten („Rechtskette") und dann Pfad vom Obersten zum Untersten („Linkskette").
2. Berechnung der „Rechtskette": Wähle p_{i+1} sodass der Winkel zwischen der Horizontalen (nach rechts) durch p_i und der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ minimal ist.
3. Berechnung der „Linkskette": Analog von oben nach unten.

Beispiel:

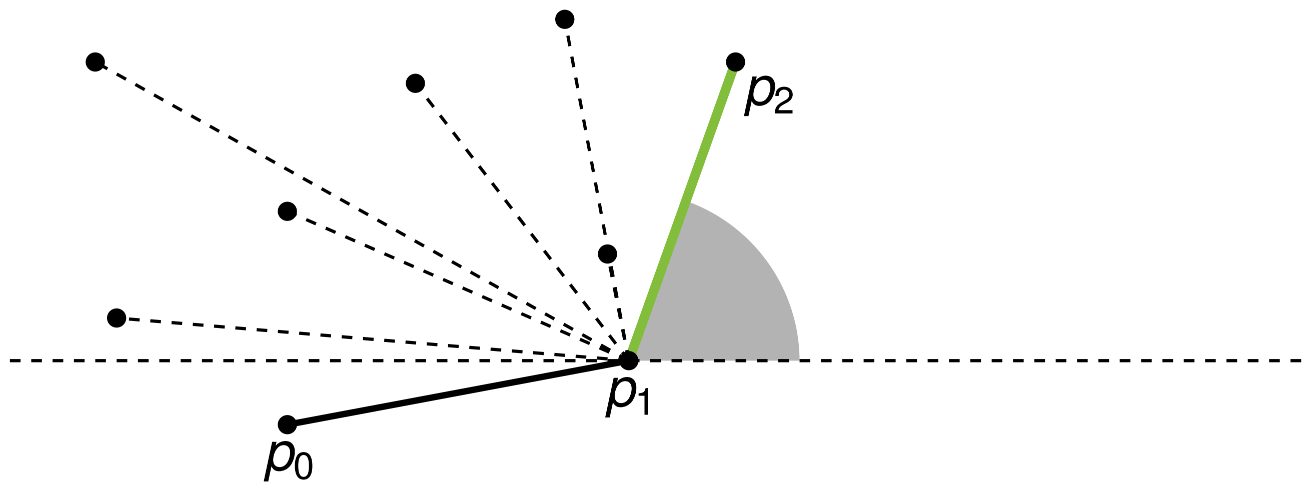


Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March)

Idee:

1. Berechne zwei Teile der konvexen Hülle getrennt: Pfad vom untersten Punkt p_0 der Konvexen Hülle zum Obersten („Rechtskette") und dann Pfad vom Obersten zum Untersten („Linkskette").
2. Berechnung der „Rechtskette": Wähle p_{i+1} sodass der Winkel zwischen der Horizontalen (nach rechts) durch p_i und der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ minimal ist.
3. Berechnung der „Linkskette": Analog von oben nach unten.

Beispiel:

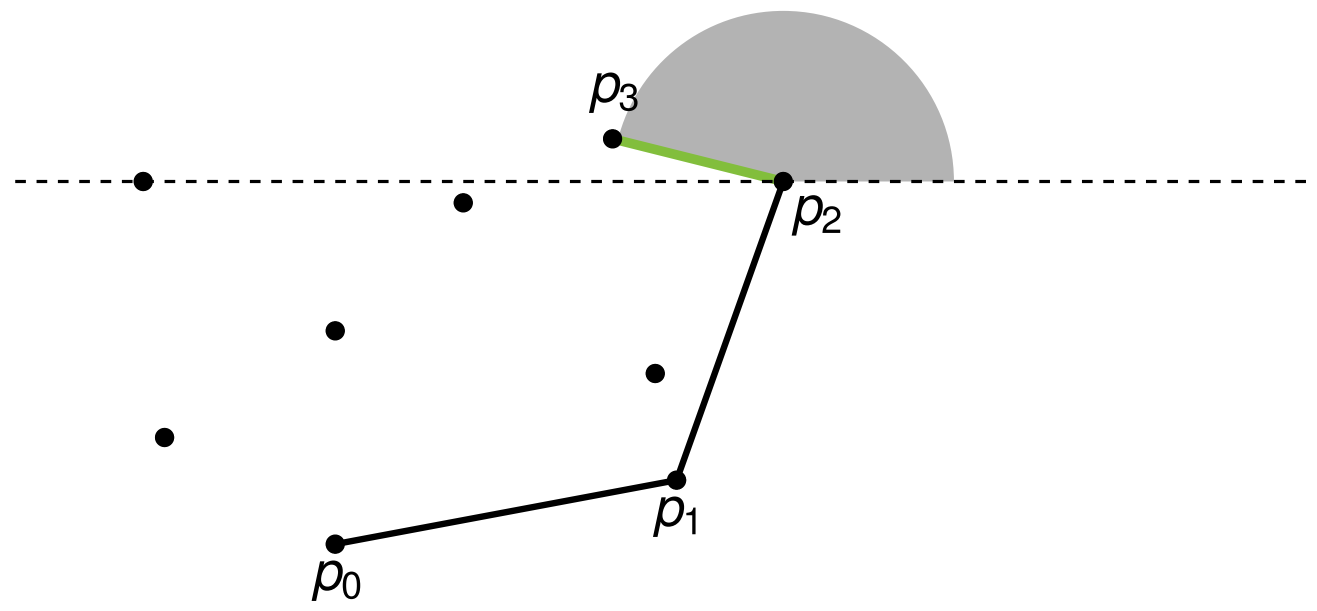


Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March)

Idee:

1. Berechne zwei Teile der konvexen Hülle getrennt: Pfad vom untersten Punkt p_0 der Konvexen Hülle zum Obersten („Rechtskette“) und dann Pfad vom Obersten zum Untersten („Linkskette“).
2. Berechnung der „Rechtskette“: Wähle p_{i+1} sodass der Winkel zwischen der Horizontalen (nach rechts) durch p_i und der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ minimal ist.
3. Berechnung der „Linkskette“: Analog von oben nach unten.

Beispiel:

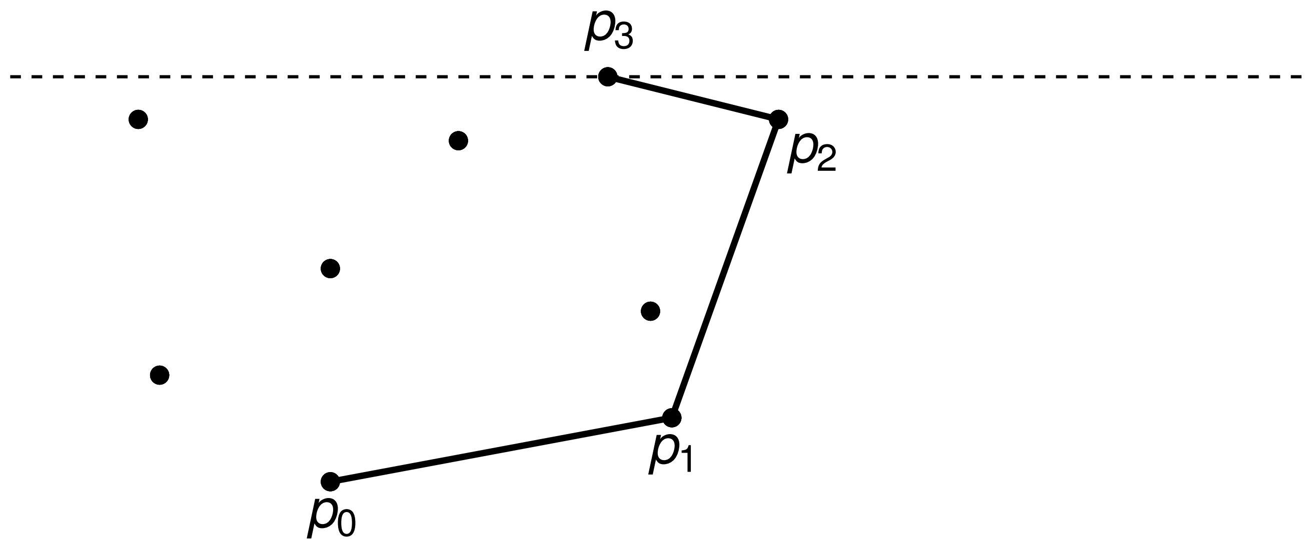


Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March)

Idee:

1. Berechne zwei Teile der konvexen Hülle getrennt: Pfad vom untersten Punkt p_0 der Konvexen Hülle zum Obersten („Rechtskette") und dann Pfad vom Obersten zum Untersten („Linkskette").
2. Berechnung der „Rechtskette": Wähle p_{i+1} sodass der Winkel zwischen der Horizontalen (nach rechts) durch p_i und der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ minimal ist.
3. Berechnung der „Linkskette": Analog von oben nach unten.

Beispiel:

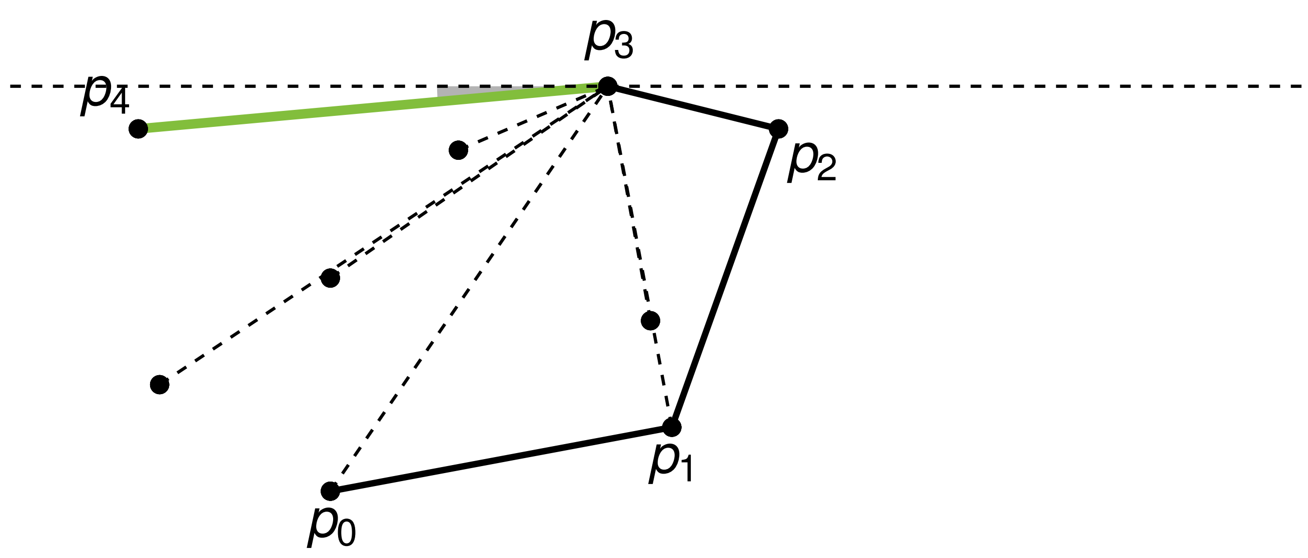


Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March)

Idee:

1. Berechne zwei Teile der konvexen Hülle getrennt: Pfad vom untersten Punkt p_0 der Konvexen Hülle zum Obersten („Rechtskette") und dann Pfad vom Obersten zum Untersten („Linkskette").
2. Berechnung der „Rechtskette": Wähle p_{i+1} sodass der Winkel zwischen der Horizontalen (nach rechts) durch p_i und der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ minimal ist.
3. Berechnung der „Linkskette": Analog von oben nach unten.

Beispiel:

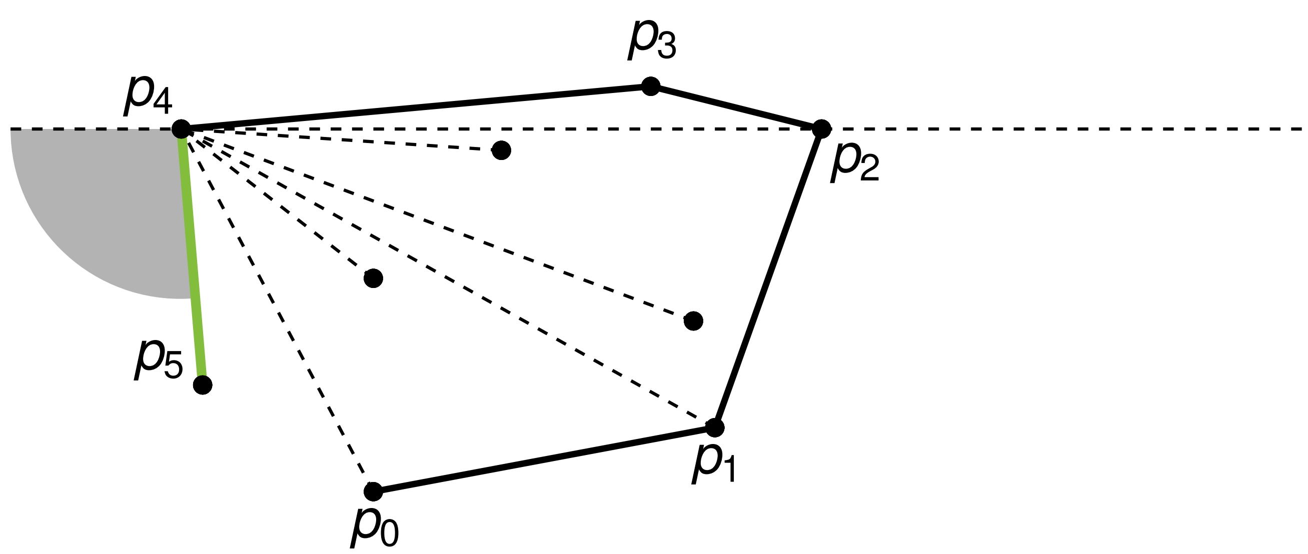


Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March)

Idee:

1. Berechne zwei Teile der konvexen Hülle getrennt: Pfad vom untersten Punkt p_0 der Konvexen Hülle zum Obersten („Rechtskette") und dann Pfad vom Obersten zum Untersten („Linkskette").
2. Berechnung der „Rechtskette": Wähle p_{i+1} sodass der Winkel zwischen der Horizontalen (nach rechts) durch p_i und der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ minimal ist.
3. Berechnung der „Linkskette": Analog von oben nach unten.

Beispiel:



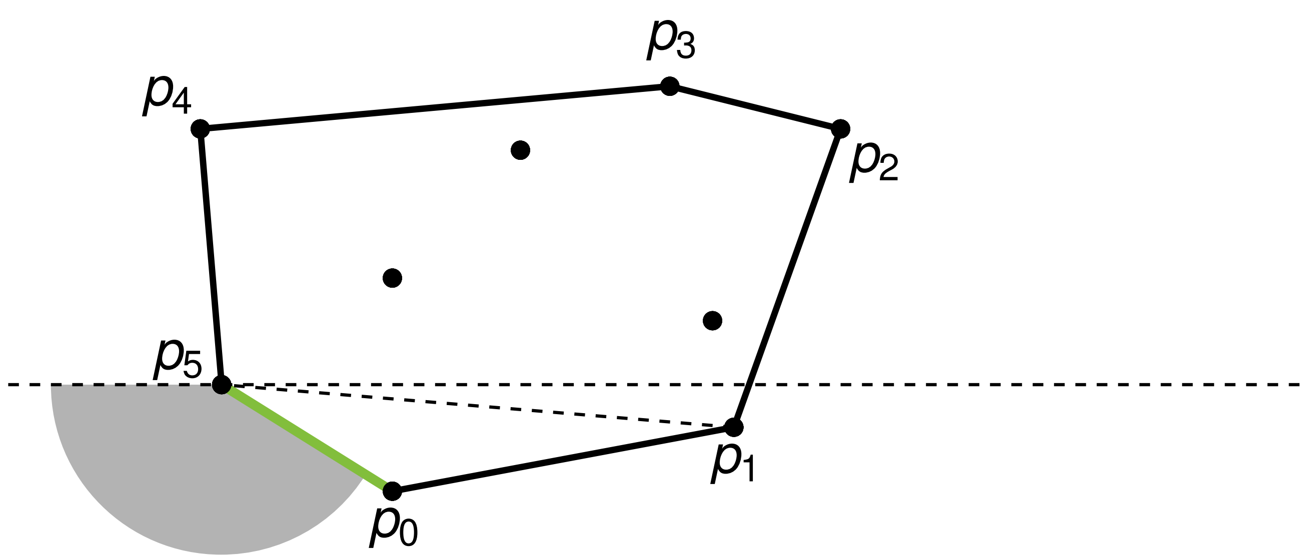
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March)

Idee:

1. Berechne zwei Teile der konvexen Hülle getrennt: Pfad vom untersten Punkt p_0 der Konvexen Hülle zum Obersten („Rechtskette") und dann Pfad vom Obersten zum Untersten („Linkskette").
2. Berechnung der „Rechtskette": Wähle p_{i+1} sodass der Winkel zwischen der Horizontalen (nach rechts) durch p_i und der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ minimal ist.
3. Berechnung der „Linkskette": Analog von oben nach unten.

Beispiel:



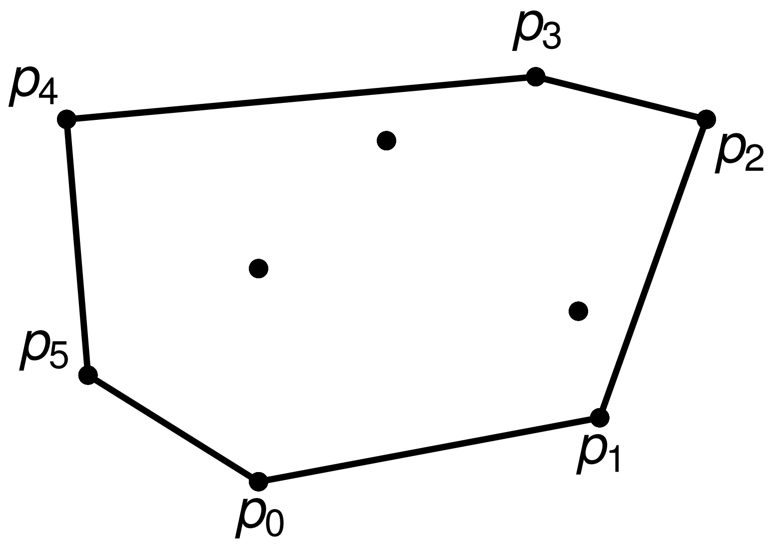
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March)

Idee:

1. Berechne zwei Teile der konvexen Hülle getrennt: Pfad vom untersten Punkt p_0 der Konvexen Hülle zum Obersten („Rechtskette“) und dann Pfad vom Obersten zum Untersten („Linkskette“).
2. Berechnung der „Rechtskette“: Wähle p_{i+1} sodass der Winkel zwischen der Horizontalen (nach rechts) durch p_i und der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ minimal ist.
3. Berechnung der „Linkskette“: Analog von oben nach unten.

Beispiel:



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March)

JARVIS' MARCH(Q)

$p_0 \leftarrow$ Punkt in Q mit kleinster y-Koordinate

$i \leftarrow 0$

while *Es gibt einen Punkt oberhalb von* p_i **do**

$p_{i+1} \leftarrow$ Punkt oberhalb von p_i, sodass der Winkel zwischen der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ und der Horizontalen durch p_i nach rechts minimal ist.

$i \leftarrow i + 1$

while $p_i \neq p_0$ **do**

$p_{i+1} \leftarrow$ Punkt unterhalb von p_i, sodass der Winkel zwischen der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ und der Horizontalen durch p_i nach links minimal ist.

$i \leftarrow i + 1$

Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March)

Karlsruher Institut für Technologie

JARVIS' MARCH(Q)

$p_0 \leftarrow$ Punkt in Q mit kleinster y-Koordinate
$i \leftarrow 0$
$O(1)$

while *Es gibt einen Punkt oberhalb von* p_i **do**

$p_{i+1} \leftarrow$ Punkt oberhalb von p_i, sodass der Winkel zwischen der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ und der Horizontalen durch p_i nach rechts minimal ist.
$i \leftarrow i + 1$
$O(n)$

while $p_i \neq p_0$ **do**

$p_{i+1} \leftarrow$ Punkt unterhalb von p_i, sodass der Winkel zwischen der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ und der Horizontalen durch p_i nach links minimal ist.
$i \leftarrow i + 1$
$O(n)$

Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March)

Jarvis' March(Q) $O(hn)$

$p_0 \leftarrow$ Punkt in Q mit kleinster y-Koordinate $O(1)$
$i \leftarrow 0$

while *Es gibt einen Punkt oberhalb von* p_i **do** $O(hn)$

  $p_{i+1} \leftarrow$ Punkt oberhalb von p_i, sodass der Winkel zwischen der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ und der Horizontalen durch p_i nach rechts minimal ist. $O(n)$
  $i \leftarrow i + 1$

while $p_i \neq p_0$ **do** $O(hn)$

  $p_{i+1} \leftarrow$ Punkt unterhalb von p_i, sodass der Winkel zwischen der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ und der Horizontalen durch p_i nach links minimal ist. $O(n)$
  $i \leftarrow i + 1$

Satz: Jarvis' March

Der Gift Wrapping Algorithmus (Jarvis' March) berechnet die konvexe Hülle $H(Q)$ von Q in $O(hn)$ Zeit, wobei h die Anzahl der Eckpunkte von $H(Q)$ ist.

Ein solcher Algorithmus wird *ausgabesensitiv* genannt.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner