# Übungsblatt 3

Besprechung in der Übung am 27. November 2014

## Aufgabe 1: Satz von Kőnig ⋆⋆⋆

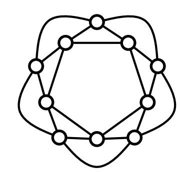
Zeigen Sie folgende Aussage. In einem bipartiten Graphen entspricht die Größe eines maximalen Matchings der Größe einer minimalen Knotenüberdeckung.

## Aufgabe 2: Bipartit und Co-Bipartit ⋆

Ein Graph ist *co-bipartit*, wenn sein Komplement bipartit ist. Zeigen Sie, dass es genau acht Graphen gibt, die bipartit und co-bipartit sind.

## Aufgabe 3: $p$-kritisch, partitionierbar und nicht-perfekt ⋆⋆

Zeigen Sie, dass der „Blütengraph“ $C_{10}^2$ (rechts) partitionierbar aber nicht $p$-kritisch ist. Geben Sie außerdem einen nicht-perfekten Graphen an, der nicht partitionierbar ist.



## Aufgabe 4: Strong Perfect Graph Conjecture ⋆⋆

Zeigen Sie, dass die fünf Aussagen $\mathrm{SPGC}_1$–$\mathrm{SPGC}_5$ äquivalent sind.

**$\mathbf{SPGC_1}$** Ein ungerichteter Graph ist genau dann perfekt, wenn er keinen induzierten Subgraph enthält, der zu $C_{2k+1}$ oder $\overline{C}_{2k+1}$ mit $k \geq 2$ isomorph ist.

**$\mathbf{SPGC_2}$** Ein ungerichteter Graph $G$ ist genau dann perfekt, wenn jeder ungerade Kreis der Länge mindestens 5 in $G$ oder $\overline{G}$ eine Sehne hat.

**$\mathbf{SPGC_3}$** Die einzigen $p$-kritischen Graphen sind $C_{2k+1}$ und $\overline{C}_{2k+1}$ für $k \geq 2$.

**$\mathbf{SPGC_4}$** Es gibt keinen $p$-kritischen Graphen mit $\alpha > 2$ und $\omega > 2$.

**$\mathbf{SPGC_5}$** Ist $G$ $p$-kritisch mit $\alpha(G) = \alpha$ und $\omega(G) = \omega$, so enthält $G$ einen induzierten Subgraphen, der isomorph ist zu $C_{\alpha\omega+1}^{\omega-1}$.

## Aufgabe 5: Partitionierbar und $p$-kritisch ⋆⋆

Zeigen Sie, dass ein Graph $G$ genau dann $p$-kritisch ist, wenn $G$ selbst aber keiner seiner echten Teilgraphen partitionierbar ist.

## Aufgabe 6: Partitionierbare Graphen ⋆⋆⋆

Zeigen Sie, dass es außer den Graphen $C_{\alpha\omega+1}^{\omega-1}$ noch weitere partitionierbare Graphen gibt, indem Sie einen solchen Graphen angeben.

## Aufgabe 7: $n$ unabhängige Mengen ⋆⋆

Zeigen Sie, dass ein partitionierbarer Graph mit $n$ Knoten genau $n$ maximale unabhängige Mengen enthält.