Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik
Vorlesung am 17. November 2016

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Definitionen zur TM

- Eine Turing-Maschine **akzeptiert** eine Eingabe $w \in \Sigma^*$, wenn sie nach Lesen von w in einem Zustand aus F stoppt.
- Sie **akzeptiert** eine Sprache L genau dann, wenn sie ausschließlich Wörter aus $w \in L$ als Eingabe akzeptiert.
- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv** oder **entscheidbar**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die auf allen Eingaben stoppt und eine Eingabe w genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$ gilt.
- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv-aufzählbar** oder **semi-entscheidbar**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die genau die Eingaben w akzeptiert für die $w \in L$.

  Das Verhalten der Turing-Maschine für Eingaben $w \notin L$ ist damit nicht definiert. D.h., die Turing-Maschine stoppt entweder nicht in einem Endzustand oder aber stoppt gar nicht.

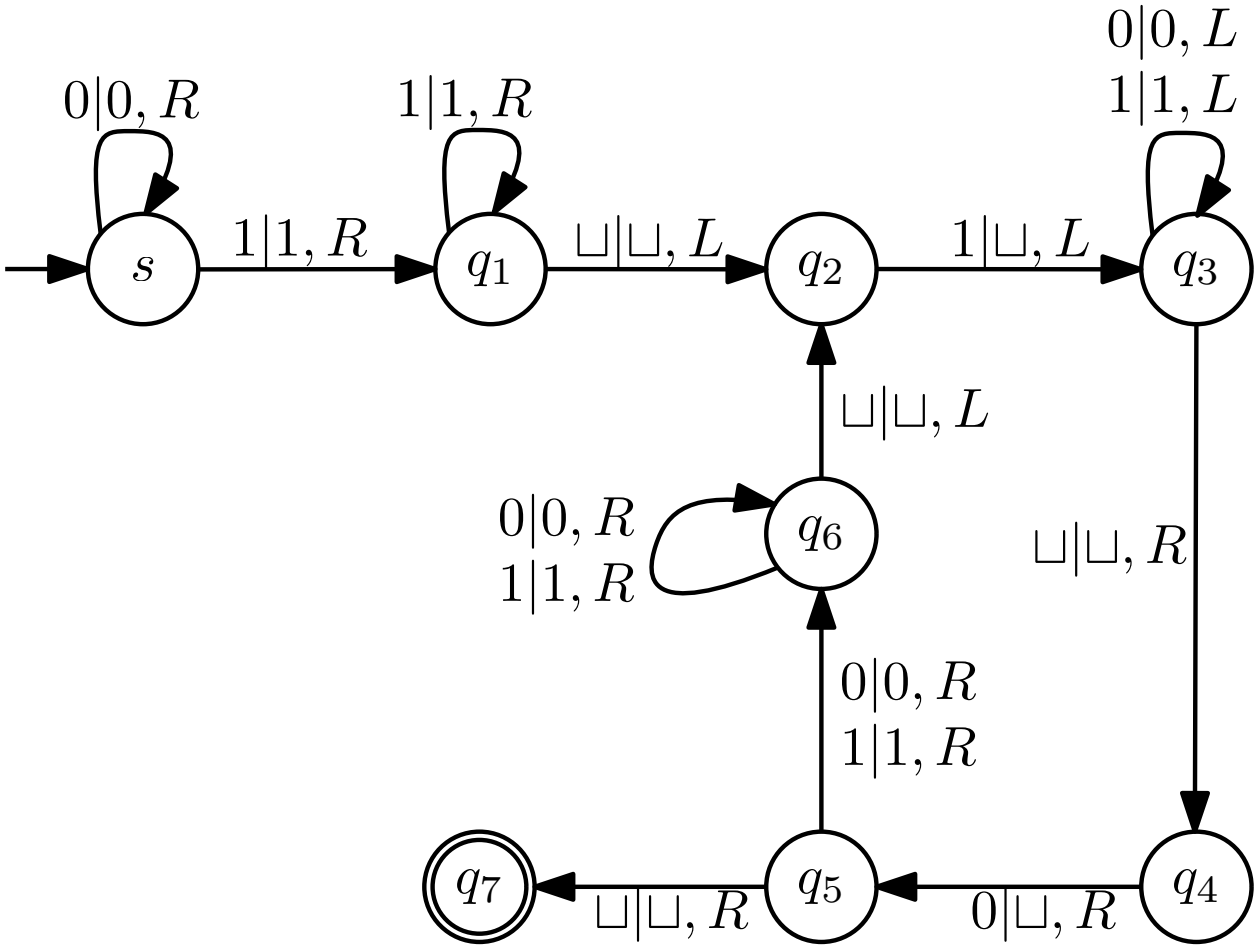
Notation: Konfiguration

- Situation in der sich eine TM $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ befindet wird durch die Angabe der **Konfiguration** codiert.

- Eine Konfiguration hat die Form $w(q)av$, wobei
  - $w, v \in \Gamma^*$
  - $a \in \Gamma$
  - $q \in Q$

- Bedeutung:
  - $\mathcal{M}$ befindet sich gerade im Zustand q.
  - Der Lesekopf steht auf dem Zeichen a.
  - Links vom Lesekopf steht das Wort w auf dem Rechenband.
  - Rechts vom Lesekopf steht das Wort v auf dem Rechenband.

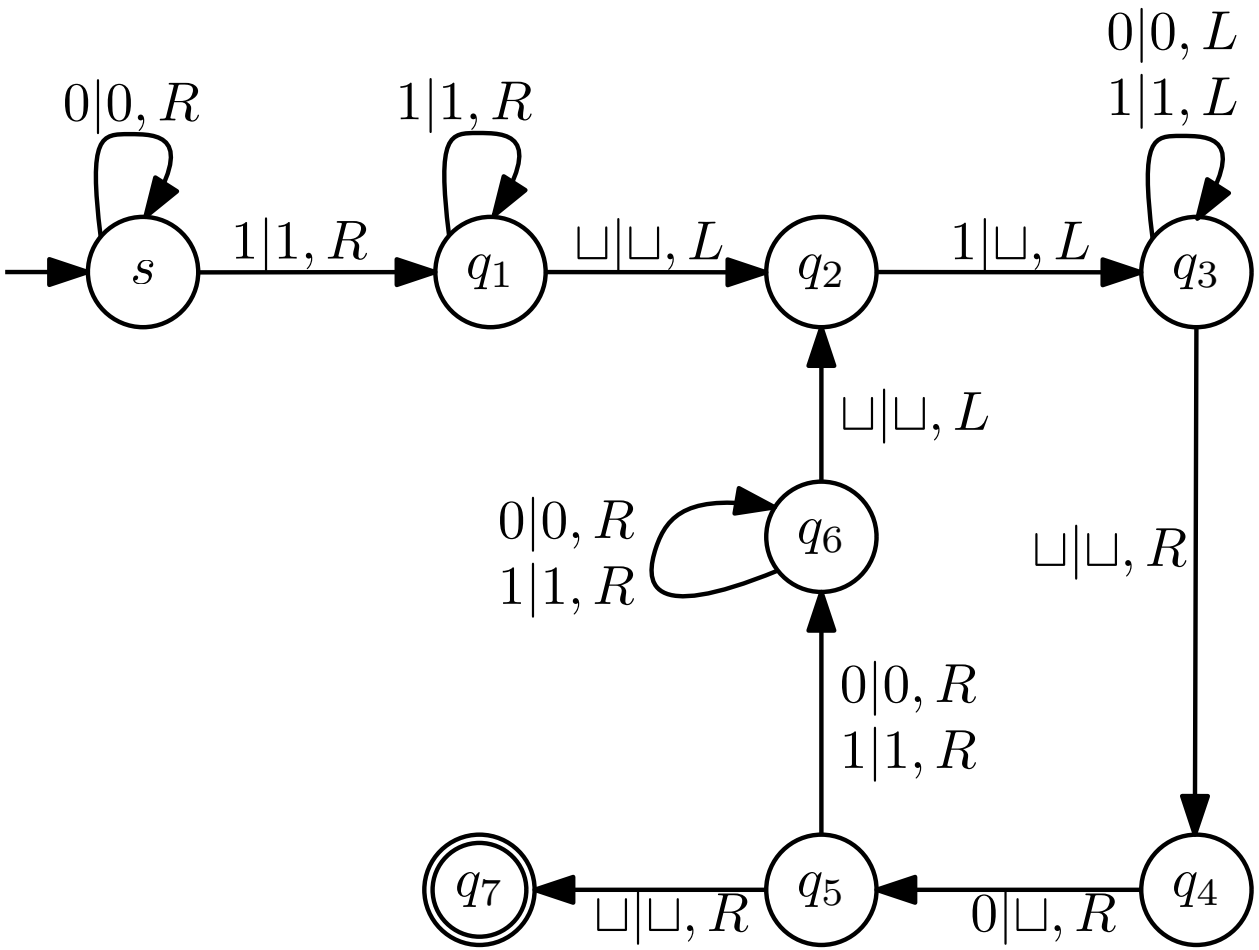
Beispiel: Konfiguration



TM akzeptiert $\{0^n1^n : n \geq 1\}$.

Eingabe: 0011

Beispiel: Konfiguration



$\sqcup(s)0011$
$0(s)011$
$00(s)11$
$001(q_1)1$
$0011(q_1)\sqcup$
$001(q_2)1$
$00(q_3)1$
$0(q_3)01$
$\sqcup(q_3)001$
$\sqcup(q_3)\sqcup001$
$\sqcup(q_4)001$
$\sqcup(q_5)01$
$0(q_6)1$
$01(q_6)\sqcup$
$0(q_2)1$
$\sqcup(q_3)0$
$\sqcup(q_3)\sqcup0$
$\sqcup(q_4)0$
$\sqcup(q_5)\sqcup$
$\sqcup(q_7)\sqcup$

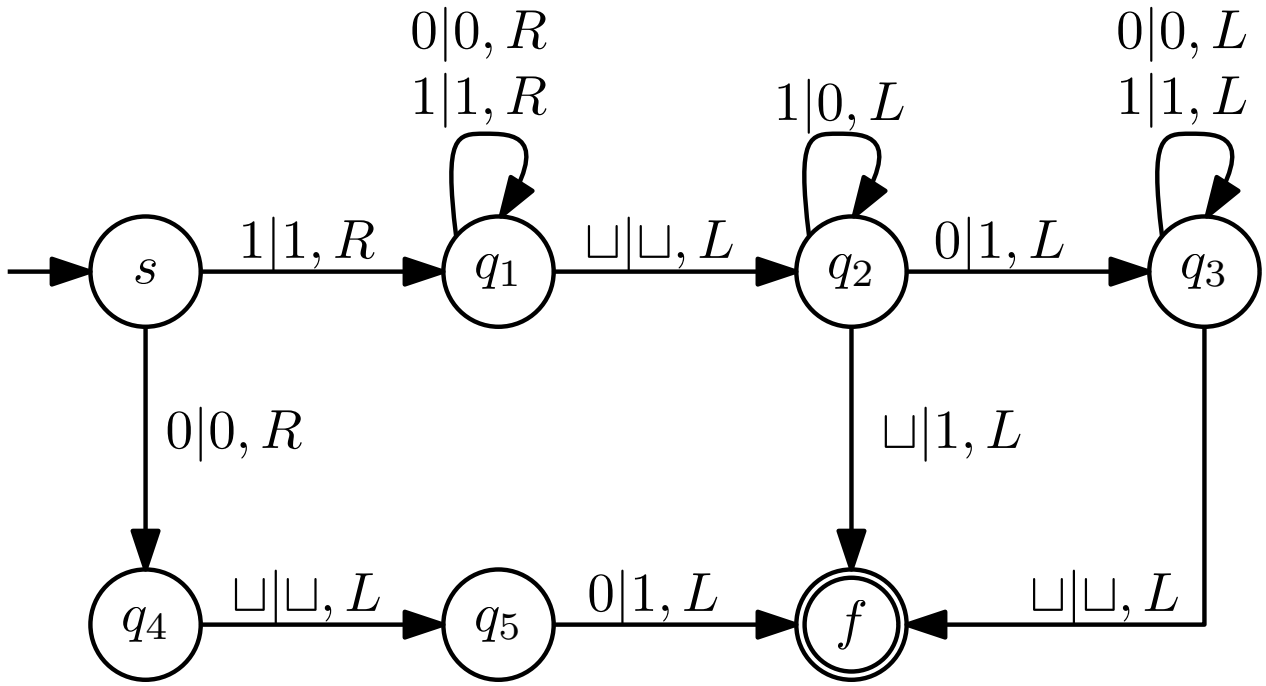
Definition: berechenbar / totalrekursiv

- Eine Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ heißt **(Turing-)berechenbar** oder **totalrekursiv**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die bei Eingabe von $w \in \Sigma^*$ den Funktionswert $f(w) \in \Gamma^*$ ausgibt.

- Eine Turing-Maschine **realisiert** eine Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$, falls gilt:

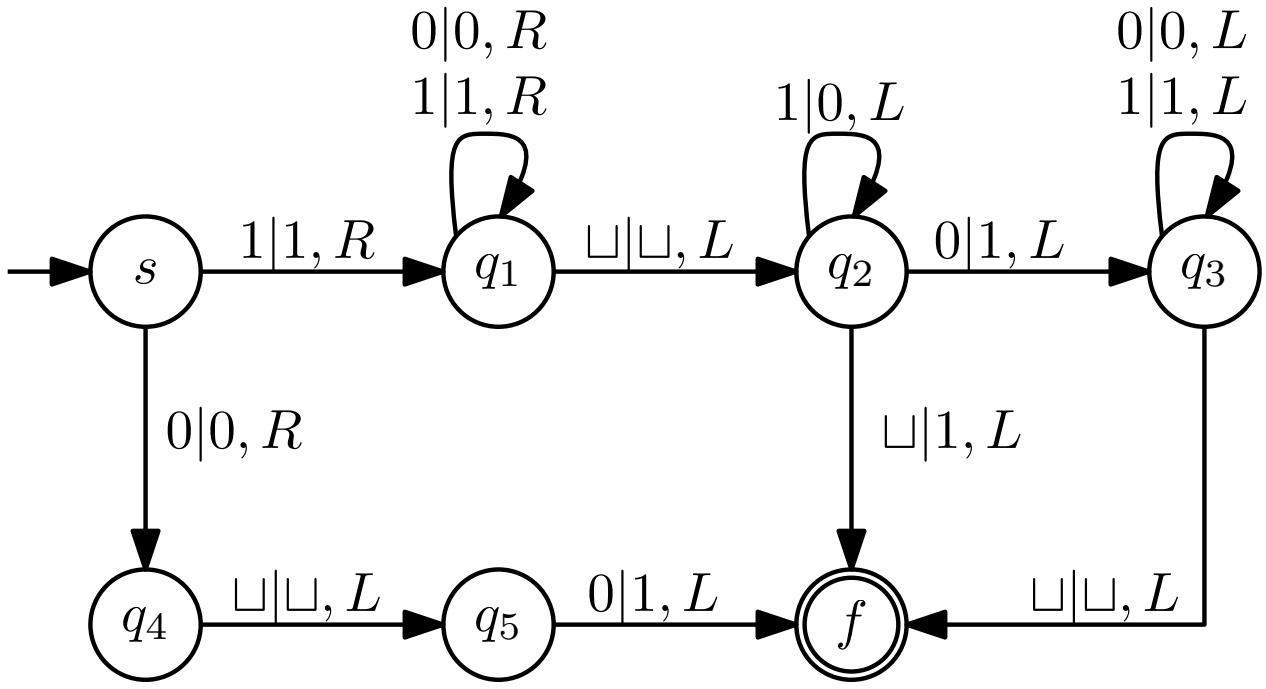
$$f(w) = \begin{cases} \text{Ausgabe der Turing-Maschine, wenn sie bei Eingabe } w \text{ stoppt} \\ \text{undefiniert sonst} \end{cases}$$

Beispiel



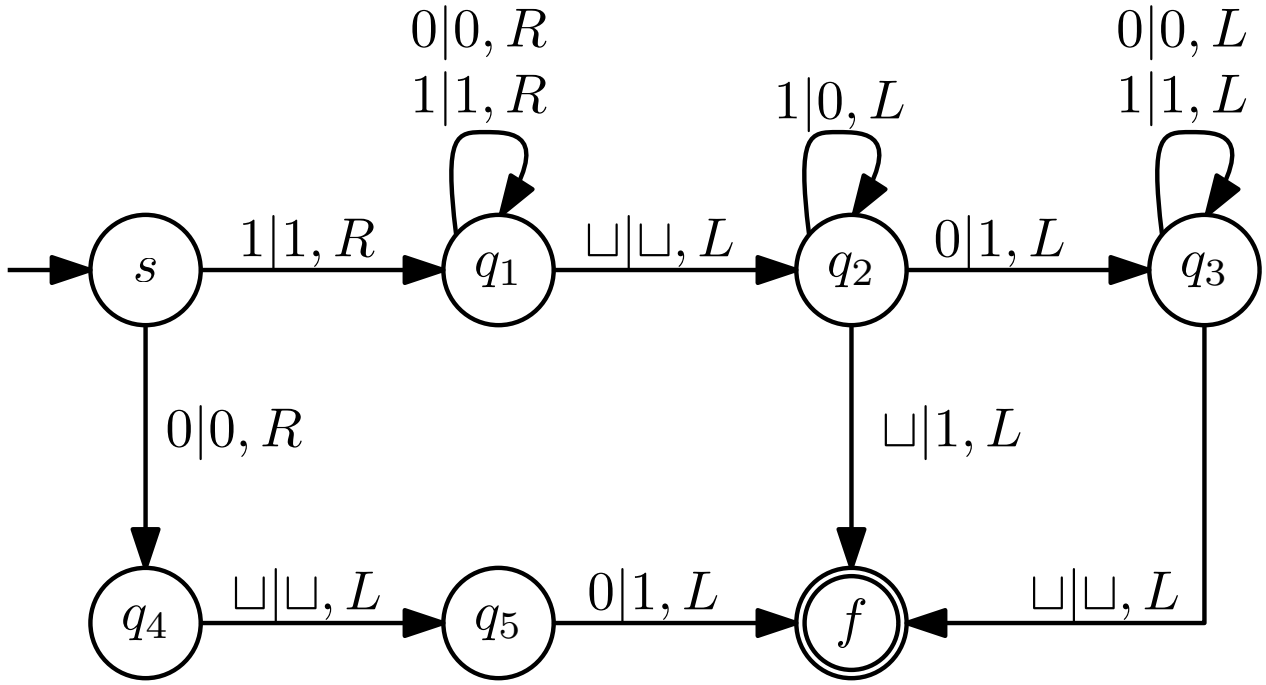
- Fasse die Eingabe *w* als binäre Zahl auf.
- Es sollen nur Eingaben ohne führende Nullen und die Null selbst akzeptiert werden.
- Addiere zur Eingabe $w \in (0 \cup 1)^*$ eine Eins.

Beispiel



Es gilt: $f(w) = \begin{cases} w+1 & \text{falls } w \in 0 \cup 1(0 \cup 1)^*, \\ & \quad w \text{ interpretiert als Binärzahl} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$

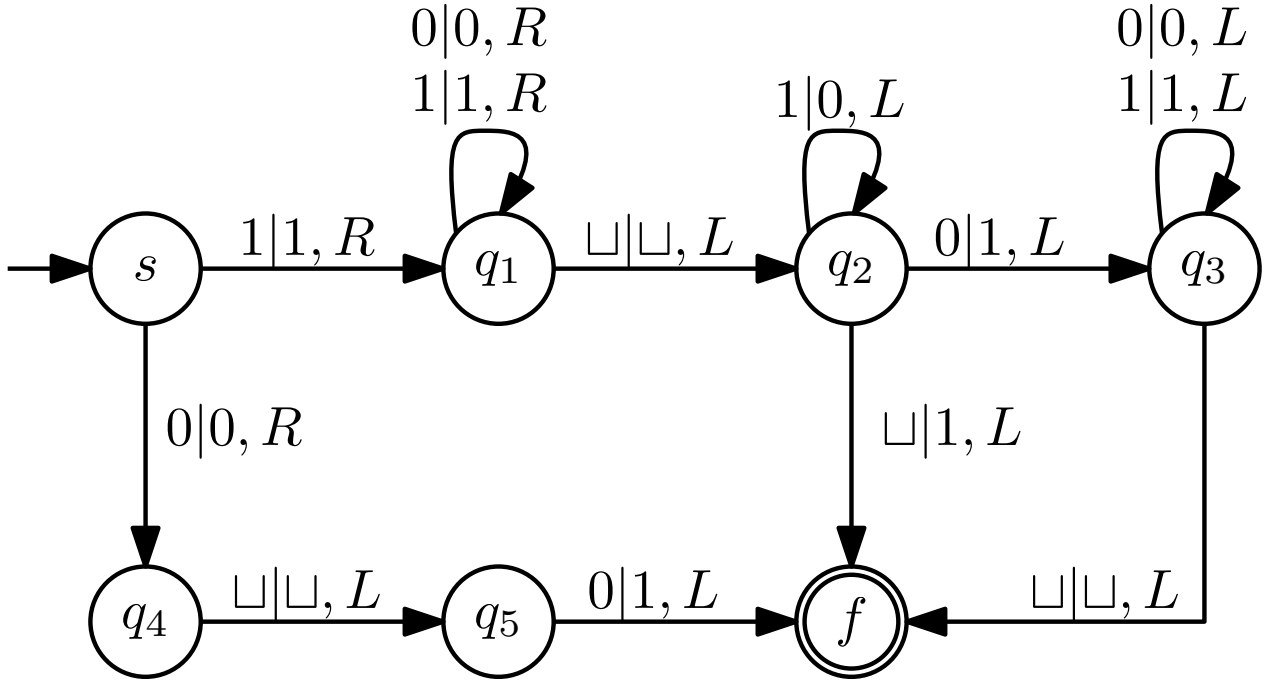
Beispiel



Dabei sind die Zustände jeweils für die folgenden Aufgaben verantwortlich:

- q_1 Bewegung des Lese-/Schreibkopfes nach rechts bis zum Eingabeende,
- q_2 Bildung des Übertrages, der durch die Addition von Eins zu einer bereits vorhandenen Eins entsteht,

Beispiel



Dabei sind die Zustände jeweils für die folgenden Aufgaben verantwortlich:

- q_3 Bewegung des Lese-/Schreibkopfes nach links, nachdem die Aufsummierung abgeschlossen ist (kein Übertrag mehr),
- q_4, q_5 Sonderbehandlung für den Fall der Eingabe 0, und
- f Endzustand.

Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit

Entscheidbarkeit von Sprachen und Berechenbarkeit von Funktionen sind verwandt:

- Eine Turing-Maschine akzeptiert eine Sprache L, wenn sie genau auf den Eingaben $w \in L$ in einem ausgezeichneten Endzustand stoppt.
- L ist entscheidbar, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die auf allen Eingaben stoppt und L akzeptiert.
- Die Funktion f heißt berechenbar, wenn eine Turing-Maschine existiert, die f realisiert.

Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit

Entscheidbarkeit von Sprachen und Berechenbarkeit von Funktionen sind verwandt:

- Man kann eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, die auf allen Eingaben stoppt, so modifizieren, dass es zwei ausgezeichnete Zustände q_J und q_N gibt und dass $\mathcal{M}$ stets in einem der Zustände q_J oder q_N hält.
- Dabei stoppt sie bei der Eingabe w genau dann in q_J, wenn sie w akzeptiert, ansonsten in q_N.
- Damit ist die Sprache L genau dann entscheidbar, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die immer in einem der Zustände $\{q_J, q_N\}$ stoppt, wobei sie gerade für $w \in L$ in q_J hält.

Korollar

- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **entscheidbar** genau dann, wenn ihre **charakteristische Funktion** χ_L berechenbar ist, wobei gilt:

$$\chi_L : \Sigma^* \to \{0,1\} \quad \text{mit} \qquad \chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Eine Sprache L ist **semi-entscheidbar** genau dann, wenn die Funktion χ_L^* berechenbar ist, wobei gilt:

$$\chi_L^*(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Church'sche These

Church'sche These
Die Menge der (Turing-)berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne überhaupt berechenbaren Funktionen.

Die Church'sche These

Church'sche These
Die Menge der (Turing-)berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne überhaupt berechenbaren Funktionen.

Interpretation

- Turing-Maschinen sind formale Modelle für Algorithmen.
- Kein Berechnungsverfahren kann algorithmisch genannt werden, wenn es nicht von einer Turing-Maschine ausführbar ist.

Bemerkung

- The Chursch'sche These ist ohne eine präzise Definition von *intuitiv berechenbar* nicht beweisbar.
- Sie ist aber in der Informatik allgemein akzeptiert.

Die Church'sche These

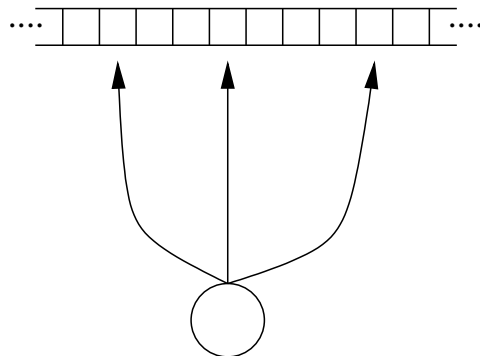
Church'sche These
Die Menge der (Turing-)berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne überhaupt berechenbaren Funktionen.

Begründung

- Es existieren keine Beispiele von Funktionen, die als intuitiv berechenbar angesehen werden, aber nicht Turing-berechenbar sind.
- Alle Versuche, realistische Modelle aufzustellen, die mächtiger sind als Turing-Maschinen, schlugen fehl.
- Eine Reihe von völlig andersartigen Ansätzen, den Begriff der Berechenbarkeit formal zu fassen, wie zum Beispiel die Registermaschine, haben sich als äquivalent erwiesen.

Erweiterungen der Turing-Maschine

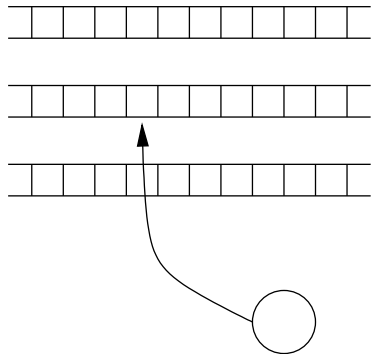
Mehrere Lese-/Schreibköpfe



- Mehrere Lese-/Schreibköpfe $(n \in \mathbb{N})$ greifen auf das eine Eingabeband zu und werden von der endlichen Kontrolle gesteuert.
- Die Übergangsfunktion ist dann vom Typ $\delta\colon Q \times \Gamma^n \to Q \times \Gamma^n \times \{L, N, R\}^n$.
- Die Zustände $q \in Q$ kann man als n-Tupel auffassen.
- Es ist nötig eine Prioritätenregel für die einzelnen Köpfe anzugeben, falls mehrere auf einem Feld des Eingabebandes stehen.

Erweiterungen der Turing-Maschine

Mehrere Bänder



- Ein Lese-/Schreibkopf kann auf mehrere Eingabebänder ($n \in \mathbb{N}$) zugreifen.
- Die Übergangsfunktion ist dann vom Typ

$$\delta\colon Q \times \Gamma \times \{1, \ldots, n\} \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\} \times \{1, \ldots, n\}.$$

Erweiterungen der Turing-Maschine

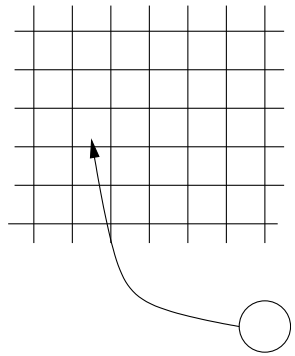
Mehrere Lese-/Schreibköpfe für mehrere Bänder

- Wir haben jetzt m Bänder und n Lese-/Schreibköpfe.
- Die Übergangsfunktion ist dann vom Typ

$$\delta\colon Q \times \Gamma^n \times \{1,\ldots,m\}^n \to Q \times \Gamma^n \times \{L,N,R\}^n \times \{1,\ldots,m\}^n.$$

Erweiterungen der Turing-Maschine

Mehrdimensionale Bänder



- Das Eingabeband ist nun mehrdimensional und hat hier im Beispiel die Dimension zwei.
- Wir sprechen dann von einem Arbeitsfeld.
- Dabei ist

$$\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L(eft), U(p), R(ight), D(own), N(othing)\}$$

Erweiterungen der Turing-Maschine

Bemerkungen

- Fragestellungen der Art:
  - Wann stoppt eine Mehrkopf-Maschine?
  - Welcher Kopf ‚gewinnt', wenn mehrere Köpfe (verschiedene) Symbole an dieselbe Stelle schreiben wollen?

  müssen bei solchen Modifikationen noch geklärt werden.

- Es hat sich allerdings gezeigt, dass keine dieser Erweiterungen mehr leistet, als eine normale Turing-Maschine.

- **Alle angegebenen Modifikationen können durch eine normale 1–Band Turing-Maschine simuliert werden.**

Die universelle Turing-Maschine

Ziel

- Bisher: Nur Turing-Maschinen, die eine bestimmte Aufgabe erfüllen.
- Jetzt: Konstruktion einer Turing-Maschine, die als Eingabe
  - ein Programm und
  - eine spezielle Eingabe

  erhält.
- Die Aufgabe besteht darin, das gegebene Programm auf der gegebenen speziellen Eingabe auszuführen.

Die universelle Turing-Maschine

Wir betrachten dazu eine normierte Turing-Maschine, d.h.

- $Q := \{q_1, \ldots, q_n\}$
- $\Sigma := \{a_1, \ldots, a_k\}$
- $\Gamma := \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_l\}$
- $s := q_1$
- $F := \{q_2\}$

- Dies bedeutet keine Einschränkung in der Mächtigkeit der Turing-Maschinen:
  - Jede beliebige Turing-Maschine kann durch eine derart normiert Turing-Maschine der obigen Form simuliert werden.
  - Jede normierte Turing-Maschine $\mathcal{M}$ lässt sich eindeutig als Wort aus $(0 \cup 1)^*$ kodieren.

Die Gödelnummer

Sei $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ eine Turing-Maschine.

Die Gödelnummer von $\mathcal{M}$, bezeichnet als $\langle \mathcal{M} \rangle$, ist definiert durch folgende Kodierungsvorschrift:

- Kodiere

$$\delta(q_i, a_j) = (q_r, a_s, d_t) \text{ durch } 0^i\,1\,0^j\,1\,0^r\,1\,0^s\,1\,0^t,$$

  wobei $d_t \in \{d_1, d_2, d_3\}$ und
  - d_1 für L,
  - d_2 für R und
  - d_3 für N steht.
- Die Turing-Maschine wird dann kodiert durch:

$$111\text{code}_1 11\text{code}_2 11 \ldots 11\text{code}_z 111,$$

  wobei code_i für $i = 1, \ldots, z$ alle Funktionswerte von δ in beliebiger Reihenfolge beschreibt.

Die Gödelnummer - Bemerkungen

- Die eigentlichen Werte der Turing-Maschine werden also (unär) durch Nullen beschrieben und die Einsen dienen als Begrenzung der Eingabewerte.
- Jede Turing-Maschine kann also durch ein Wort aus $(0 \cup 1)^*$ kodiert werden.
- Umgekehrt beschreibt jedes Wort aus $(0 \cup 1)^*$ (höchstens) eine Turing-Maschine.
- Wir vereinbaren, dass ein Wort, das keine Turing-Maschine in diesem Sinne beschreibt, (zum Beispiel ε, 0, 000) eine Turing-Maschine kodiert, die $\emptyset$ akzeptiert.
- Eine *universelle Turing-Maschine* erhält als Eingabe ein Paar $(\langle \mathcal{M} \rangle, w)$, wobei $w \in \{0,1\}^*$ ist, und sie simuliert $\mathcal{M}$ auf w.

Die Gödelnummer - Beispiel

Sei $\mathcal{M} = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \sqcup, \{0, 1, \sqcup\}, \delta, q_1, \{q_2\})$, mit

$$\delta(q_1, 1) = (q_3, 0, R)$$
$$\delta(q_3, 0) = (q_1, 1, R)$$
$$\delta(q_3, 1) = (q_2, 0, R)$$
$$\delta(q_3, \sqcup) = (q_3, 1, L)$$

$\mathcal{M}$ zusammen mit der Eingabe 1011 ist dann:

11101001000101001100010101001001100010010001010011000100010001001011111011

Definition

Zu $w \in \{0,1\}^*$ sei T_w

- die Turing-Maschine mit der Gödelnummer (GN) w, bzw.
- die Turing-Maschine, die $\emptyset$ akzeptiert.

Es sei $L(T_w)$ die Sprache, die von T_w akzeptiert wird.

Die Diagonalsprache

Wir konstruieren die sogenannte **Diagonalsprache** L_d , wie folgt:

- Betrachte die Wörter aus $\{0,1\}^*$ in *kanonischer* Reihenfolge, d.h. w_i steht vor w_j $(i < j)$, falls
  - $|w_i| < |w_j|$, oder
  - $|w_i| = |w_j|$ und w_i lexikographisch vor w_j steht.
- $\mathcal{M}_j$ sei die TM, die durch die Gödelnummer w_j kodiert ist.
- Wir konstruieren eine unendliche Tabelle,
  - an deren Position (i,j) für $1 \leq i,j < \infty$ eine Null oder eine Eins steht, und
  - welche beinhaltet, ob w_i in $L(\mathcal{M}_j)$ ist.
- Damit gilt für die Einträge

$$(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{M}_j \ w_i \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Diagonalsprache

- Damit gilt für die Einträge

$$(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{M}_j \ w_i \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Definiere dazu

$$L_d := \{w_i \mid \mathcal{M}_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\}.$$

- L_d enthält also alle w_i, für die auf der Diagonalen an der Stelle (i,i) eine Null steht.
- Dies führt später zu einem Diagonalbeweis (Cantor).

Die Diagonalsprache - Veranschaulichung

$w \in \{0,1\}^*$	Gödelnummer							
		w_i		w_j		w_k		
$\vdots$	$\vdots$							
w_i	1	**0**	1	0	1	0	0	$w_i \in L_d$
w_j	0	0	**1**	0	0	1	1	$w_j \notin L_d$
w_k	1	0	0	**1**	1	0	1	$w_k \notin L_d$
$\vdots$	$\vdots$							

Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

Satz (Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache):
Die Sprache L_d ist nicht entscheidbar.

Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

Satz (Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache):
Die Sprache L_d ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Falls L_d entscheidbar ist, gibt es eine Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$, die

- (1) stets hält,
- (2) genau die $w \in L_d$ akzeptiert.

Wende nun $\mathcal{M}_i$ auf w_i an:

- Falls $w_i \in L_d$, dann wird w_i, wegen (2) von $\mathcal{M}_i$ akzeptiert.
- Falls $w_i \notin L_d$, dann akzeptiert $\mathcal{M}_i$ das Wort w_i wegen (2) nicht.

Beides ist ein Widerspruch zur Definition von L_d.

Korollar

Korollar
Die Sprache $L_d^c := \{0,1\}^* \setminus L_d$ ist nicht entscheidbar.

Korollar

Korollar
Die Sprache $L_d^c := \{0,1\}^* \setminus L_d$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Falls L_d^c entscheidbar ist, gibt es eine Turing-Maschine, die L_d^c entscheidet.
- Diese kann aber leicht zu einer Turing-Maschine modifiziert werden, die L_d entscheidet.
- Dies ist ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache.

Korollar

Korollar
Die Sprache $L_d^c := \{0,1\}^* \setminus L_d$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Falls L_d^c entscheidbar ist, gibt es eine Turing-Maschine, die L_d^c entscheidet.
- Diese kann aber leicht zu einer Turing-Maschine modifiziert werden, die L_d entscheidet.
- Dies ist ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache.

Paradoxien und Selbstbezüglichkeit

Der Barbier von Hintertupfingen rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.
Wer rasiert den Barbier?

Paradoxien und Selbstbezüglichkeit

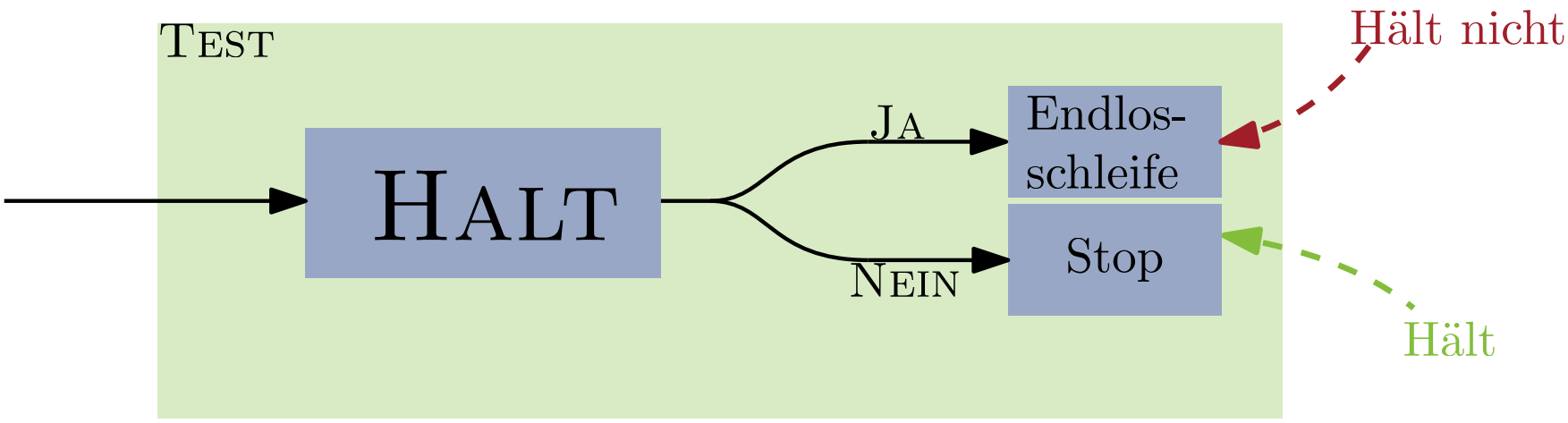
Der Barbier von Hintertupfingen rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.
Wer rasiert den Barbier?

Daniel Düsentrieb behauptet, eine allwissende Maschine erfunden zu haben.
Man stellt eine Ja/Nein-Frage und die Antwort leuchtet auf.
Dagobert Duck kauf die Maschine.
Will aber nur bei korrekter Antwort zahlen.
Er stellt die Maschine die Frage: Wirst du mit **Nein** antworten?
Was passiert?

Halteproblem

Programm HALT:

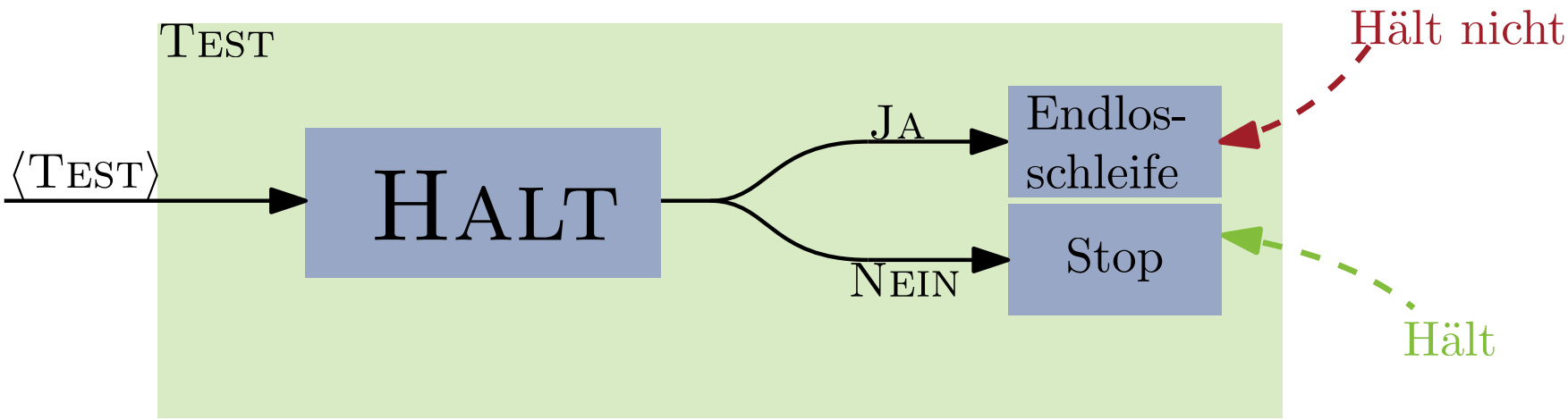
Programm TEST:



Halteproblem

Programm HALT:

Programm TEST:



Wie verhält sich TEST bei der Eingabe ⟨TEST⟩?

Das Halteproblem

Das **Halteproblem** definiert folgende Sprache

$$\mathcal{H} := \{wv \mid T_w \text{ hält auf der Eingabe } v\}.$$

Satz (Unentscheidbarkeit des Halteproblems):
$\mathcal{H}$ ist nicht entscheidbar.

Interpretation:

- Das Problem, ob eine Turing-Maschine auf einer Eingabe w stoppt, ist nicht entscheidbar.

Das Halteproblem

Satz (Unentscheidbarkeit des Halteproblems):
$\mathcal{H} = \{wv \mid T_w \text{ hält auf der Eingabe } v\}$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Angenommen es existiert eine stets haltende Turing-Maschine, die $\mathcal{H}$ entscheidet.
- Wir konstruieren daraus eine stets haltende Turing-Maschine, die L_d^c entscheidet, mit Widerspruch zum letzten Korollar.

Sei w eine Eingabe, für die wir entscheiden wollen, ob $w \in L_d^c$.
Wir können wie folgt vorgehen:

- Berechne das i, so dass $w = w_i$ ist.
- Betrachte die durch w_i kodierte Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$.
- Wende die Turing-Maschine für $\mathcal{H}$ auf $\langle \mathcal{M}_i \rangle \cdot w_i$ an.

Das Halteproblem

Satz (Unentscheidbarkeit des Halteproblems):
$\mathcal{H} = \{wv \mid T_w \text{ hält auf der Eingabe } v\}$ ist nicht entscheidbar.

Sei w eine Eingabe, für die wir entscheiden wollen, ob $w \in L_d^c$.
Wir können wie folgt vorgehen:

- Berechne das i, so dass $w = w_i$ ist.
- Betrachte die durch w_i kodierte Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$.
- Wende die Turing-Maschine für $\mathcal{H}$ auf $\langle \mathcal{M}_i \rangle \cdot w_i$ an.

Wir machen folgende Fallunterscheidung:

- Falls $\langle \mathcal{M}_i \rangle \cdot w_i$ nicht akzeptiert wird, dann hält $\mathcal{M}_i$ nicht auf w_i.
- Nach Definition von $\mathcal{H}$ ist also $w_i \in L_d$ und damit $w_i \notin L_d^c$.
- Falls $\langle \mathcal{M}_i \rangle \cdot w_i$ akzeptiert wird, dann hält $\mathcal{M}_i$ auf w_i.
- Dann können wir auf der universellen Turing-Maschine die Berechnung von $\mathcal{M}_i$ auf w_i simulieren.