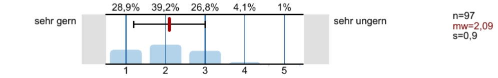
Theoretische Grundlagen der Informatik
Vorlesung am 17. Januar 2019

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

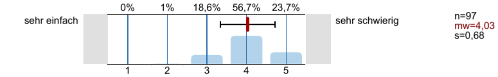
Evaluation – Ergebnisse

Karlsruher Institut für Technologie

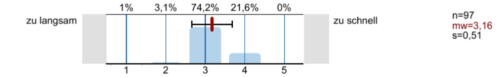
1.2) Wie gerne besuchen Sie diese Lehrveranstaltung?



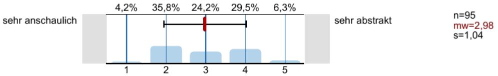
1.6) Inhalt



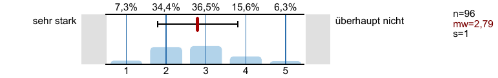
1.9) Geschwindigkeit



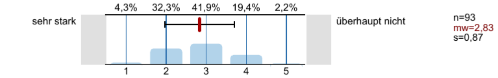
1.10) Anschaulichkeit (durch hilfreiche Beispiele)



3.1) Verweist der/die Dozent/in auf aktuelle Forschung?



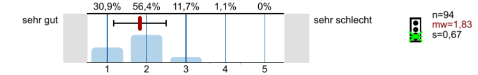
3.2) Verweist der/die Dozent/in auf Zusammenhänge zwischen Theorie und Praxis?



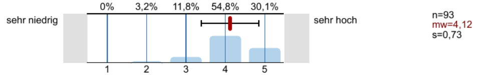
Evaluation – Ergebnisse

Karlsruher Institut für Technologie

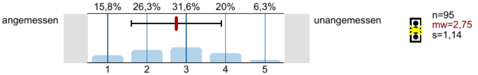
5.1) Bitte benoten Sie die Lehrveranstaltung insgesamt



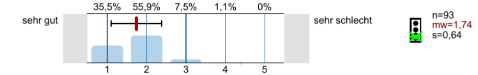
5.2) Wie hoch ist der notwendige Arbeitsaufwand für diese Lehrveranstaltung?



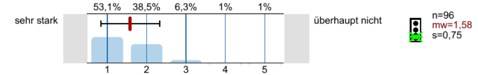
5.3) Der notwendige Arbeitsaufwand für die Lehrveranstaltung ist...



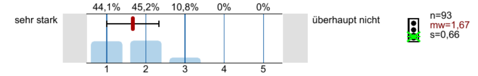
5.4) Wie ist die Lehrveranstaltung strukturiert?



5.5) Wirkt der/die Dozent/in engagiert und motiviert bei der Durchführung der Veranstaltung?



5.6) Geht der/die Dozent/in auf Fragen und Belange der Studierenden ein?



Evaluation – Ergebnisse

Gut gefallen hat mir insbesondere:

Erklärungen

Beispiele

"Testen Sie sich"-Aufgaben

Nicht gefallen hat mir insbesondere:

Übungsblätter

Beamer

abstrakte Themen

Treppenstufen

Übersicht

Chomsky-Hierarchie	Wortproblem letzte Vorlesung	Beispiele heute
Chomsky-0	semi-entscheidbar NTM akzeptiert	
Chomsky-1 kontextsensitiv	$\mathcal{NP}$-schwer $\mathcal{NTAPE}(n)$	
Chomsky-2 kontextfrei	polynomiell CYK-Algorithmus	
Chomsky-3 regulär	linear DEA	

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

KIT Karlsruher Institut für Technologie

Satz (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen):
Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\ v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen):
Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ eine Darstellung

$$z = uvwxy \text{ mit } |vwx| \leq n\,,\ vx \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^iwx^iy \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen):
Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ eine Darstellung

$$z = uvwxy \text{ mit } |vwx| \leq n\,,\; vx \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^iwx^iy \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Für alle	$\forall L \subseteq \Sigma^*$ mit L kontextfrei
existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall z \in L$ mit $|z| > n$
existiert	$\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ mit $z = uvwxy, |vwx| \leq n, vx \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0:$
gilt	$uv^iwx^iy \in L$

Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen

Karlsruher Institut für Technologie

Satz (Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen):
Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ gilt:

Wenn wir in z mindestens n Buchstaben markieren, so existiert eine Darstellung

$$z = uvwxy$$

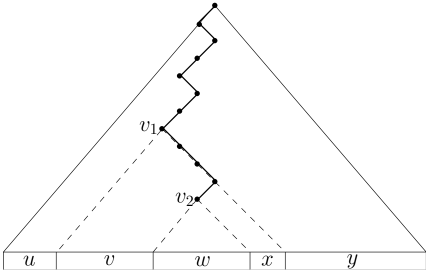
in der von den mindestens n markierten Buchstaben

- höchstens n zu vwx gehören und
- mindestens einer zu vx gehört,

bei der auch $uv^iwx^iy \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

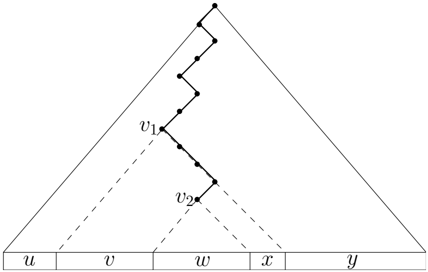
Beweis von Ogden's Lemma

- Sei L kontextfreie Sprache.
- Sei G Grammatik zu L mit Variablen V in Chomsky-Normalform, d.h. alle Regeln sind von der Form $A \to BC$ oder $A \to a$.
- Setze $n := 2^{|V|+1}$.
- Wähle beliebiges Wort $z \in L$ mit $|z| > n$
- Betrachte einen Syntaxbaum T zu z.



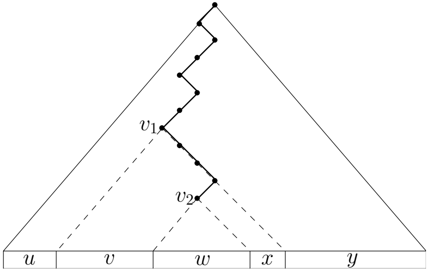
Beweis von Ogden's Lemma

- T hat $|z|$ Blätter, die Vorgänger der Blätter haben 1 Nachfolger und alle weiteren inneren Knoten haben 2 Nachfolger.
- Seien nun mindestens n Blätter markiert.
- Durchlaufe einen Weg von der Wurzel zu einem Blatt wie folgt: Wähle stets den Nachfolger, auf dessen Seite die größere Anzahl markierter Blätter liegt.
- Nenne Knoten auf dem Weg, für die rechter und linker Unterbaum markierte Blätter hat, **Verzweigungsknoten**.



Beweis von Ogden's Lemma

- Wegen $n > 2^{|V|}$ liegen auf dem Weg mindestens $|V| + 1$ Verzweigungsknoten
- Von den letzten $|V| + 1$ Verzweigungsknoten entsprechen mindestens zwei Knoten v_1, v_2 derselben Variablen A.
- Sei vwx das Teilwort von z im Unterbaum von v_1.
- Sei w das Teilwort von z im Unterbaum von v_2.
- Damit sind u und y eindeutig bestimmt.



Beweis von Ogden's Lemma

- Da v_1 Verzweigungsknoten ist, enthält vx mindestens einen markierten Buchstaben.
- Da der Unterbaum von v_1 inkl. v_1 nur $|V| + 1$ Verzweigungsknoten enthält, gibt es in vwx höchstens $2^{|V|+1} = n$ markierte Buchstaben.
- Zu G existieren die Ableitungen

$$S \xrightarrow{*} uAy, \qquad A \xrightarrow{*} vAx, \qquad A \xrightarrow{*} w.$$

Daraus kann z abgeleitet werden durch

$$S \xrightarrow{*} uAy \xrightarrow{*} uvAxy \xrightarrow{*} uvwxy = z,$$

aber auch $uv^i wx^i y$ für jedes $i \geq 1$ durch

$$S \xrightarrow{*} uAy \xrightarrow{*} uvAxy \xrightarrow{*} uv^2Ax^2y \xrightarrow{*} \cdots \rightarrow uv^iAx^iy \rightarrow uv^iwx^iy.$$

Also ist auch $uv^iwx^iy \in L$ für $i \geq 0$.

Bemerkung

- Der Spezialfall von Ogden's Lemma, in dem alle Buchstaben von z markiert sind, ist gerade das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

Satz (Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen):
Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ gilt:

Wenn wir in z mindestens n Buchstaben markieren, so existiert eine Darstellung

$$z = uvwxy$$

in der von den mindestens n markierten Buchstaben

- höchstens n zu vwx gehören und
- mindestens einer zu vx gehört,

bei der auch $uv^iwx^iy \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Übersicht

Chomsky-Hierarchie	**Wortproblem** letzte Vorlesung	**Beispiele** heute
Chomsky-0	semi-entscheidbar NTM akzeptiert	
Chomsky-1 kontextsensitiv	$\mathcal{NP}$-schwer $\mathcal{NTAPE}(n)$	
Chomsky-2 kontextfrei	polynomiell CYK-Algorithmus	
Chomsky-3 regulär	linear DEA	

Echtheit der Chomsky-Hierarchie

Satz:
Die Chomsky-Hierarchie ist echt, d.h.

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0 \ ,$$

wobei $\mathcal{L}_i$, $0 \leq i \leq 3$, die Klasse der durch Typ-i-Grammatiken erzeugten Sprachen bezeichnet.

Beweis

Teil 1:	Es gibt eine kontextfreie Sprache L,	$\rightsquigarrow L \in \mathcal{L}_2$
	die nicht regulär ist.	$\rightsquigarrow L \notin \mathcal{L}_3$
Teil 2:	Es gibt eine kontextsensitive Sprache L,	$\rightsquigarrow L \in \mathcal{L}_1$
	die nicht kontextfrei ist.	$\rightsquigarrow L \notin \mathcal{L}_2$
Teil 3:	Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache L,	$\rightsquigarrow L \in \mathcal{L}_0$
	die nicht kontextsensitiv ist.	$\rightsquigarrow L \notin \mathcal{L}_1$

Beweis – Teil 1

Es gibt eine kontextfreie Sprache, die nicht regulär ist.

Die Sprache

$$L = \{a^i b^i \mid i \geq 1\}$$

ist kontextfrei und wird durch die Grammatik

$$\begin{aligned} V &= \{S\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ R &= \{S \rightarrow ab \mid aSb\} \ . \end{aligned}$$

erzeugt. Sie ist aber nicht regulär.
(Siehe auch Beispiele zum Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Beweis – Teil 2

Es gibt eine kontextsensitive Sprache, die nicht kontextfrei ist.

Die Sprache

$$L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

ist kontextsensitiv.

Beweis

- L kontextsensitiv $\Leftrightarrow$ es gibt NTM mit linearem Speicherbedarf für L
- Eingabe $w \in \{a, b, c\}^*$
- Überprüfe deterministisch, ob $w = a^i b^j c^k$
- Überprüfe deterministisch, ob $j = i$ und $k = i$
- Speicherbedarf: $i + j + k$, also linear
- $\Rightarrow L$ kontextsensitiv

Beweis – Teil 2

Es gibt eine kontextsensitive Sprache, die nicht kontextfrei ist.

Die Sprache

$$L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

ist nicht kontextfrei.

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen):
Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ eine Darstellung

$$z = uvwxy \text{ mit } |vwx| \leq n\,,\ vx \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^i wx^i y \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Durch **Widerlegen** der Aussage des Pumping-Lemmas für eine gegebene Sprache L zeigen wir, dass L **nicht kontextfrei** ist.

Beweis – Teil 2

Aussage des kontextfreien PL für Sprache L:
$\exists n \quad \forall z \in L, |z| > n \quad \exists uvwxy = z, |vwx| \leq n, vx \neq \varepsilon$
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : \quad uv^i wx^i y \in L$

Widerlegen der Aussage
$\forall n \quad \exists z \in L, |z| > n \quad \forall uvwxy = z, |vwx| \leq n, vx \neq \varepsilon \quad \exists i \in \mathbb{N}_0 :$
$uv^i wx^i y \notin L$

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis

“$\forall$” Betrachte beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
“$\exists$” Wähle $z = a^n b^n c^n$. Beachte: $|z| = 3n > n$ und $z \in L$.
“$\forall$” Betrachte beliebige Zerlegung $z = uvwxy$, $|vwx| \leq n$, $vx \neq \varepsilon$.
“$\exists$” Wähle $i = 0$.

Beweis – Teil 2

Widerlegen der Aussage
$\forall n \quad \exists z \in L, |z| > n \quad \forall uvwxy = z, |vwx| \leq n, vx \neq \varepsilon \quad \exists i \in \mathbb{N}_0:$
$uv^i wx^i y \notin L$

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis

“$\forall$” Betrachte beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
“$\exists$” Wähle $z = a^n b^n c^n$. Beachte: $|z| = 3n > n$ und $z \in L$.
“$\forall$” Betrachte beliebige Zerlegung $z = uvwxy$, $|vwx| \leq n$, $vx \neq \varepsilon$.
“$\exists$” Wähle $i = 0$.

Fallunterscheidung, Fall 1: vwx enthält kein c
Dann ist $uv^0 wx^0 y = a^r b^s c^n \notin L$ weil entweder $r < n$ oder $s < n$.

Fallunterscheidung, Fall 2: vwx enthält kein a
Dann ist $uv^0 wx^0 y = a^n b^r c^s \notin L$ weil entweder $r < n$ oder $s < n$.

Beweis – Teil 2

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Alternativer Beweis mit Ogden's Lemma

Satz (Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen):
Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ gilt:

Wenn wir in z mindestens n Buchstaben markieren, so existiert eine Darstellung

$$z = uvwxy$$

in der von den mindestens n markierten Buchstaben

- höchstens n zu vwx gehören und
- mindestens einer zu vx gehört,

bei der auch $uv^iwx^iy \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Beweis – Teil 2

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Alternativer Beweis mit Ogden's Lemma

Aussage von Ogden's Lemma für Sprache L:
$\exists n \quad \forall z \in L, |z| > n$, mind. n Markierungen
$\exists uvwxy = z$, vwx mit höchst. n Markierungen, vx mit mind. 1 Markierung $\quad \forall i \in \mathbb{N}_0 : \quad uv^i wx^i y \in L$

Widerlegen der Aussage
$\forall n \quad \exists z \in L, |z| > n$, mind. n Markierungen
$\forall uvwxy = z$, vwx höchst. n Markierungen, vx mind. 1 Markierung
$\exists i \in \mathbb{N}_0 : \quad uv^i wx^i y \notin L$

Beweis – Teil 2

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Alternativer Beweis mit Ogden's Lemma

Widerlegen der Aussage

$\forall n \quad \exists z \in L, |z| > n$, mind. n Markierungen

$\forall uvwxy = z$, vwx höchst. n Markierungen, vx mind. 1 Markierung

$\exists i \in \mathbb{N}_0: \quad uv^iwx^iy \notin L$

"$\forall$" Betrachte beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

"$\exists$" Wähle $z = a^{n+1}b^{n+1}c^{n+1}$ und markiere alle b.

(Beachte: $|z| > n$, $z \in L$, mind. n Markierungen.)

"$\forall$" Betrachte beliebige Zerlegung $z = uvwxy$, so dass vwx höchst. n Markierungen, vx mind. 1 Markierung hat.

"$\exists$" Wähle $i = 0$.

Da vwx kein a oder kein c hat, gilt $uv^0wx^0y \notin L$

Echtheit der Chomsky-Hierarchie

Satz:
Die Chomsky-Hierarchie ist echt, d.h.

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0 \ ,$$

wobei $\mathcal{L}_i$, $0 \leq i \leq 3$, die Klasse der durch Typ-i-Grammatiken erzeugten Sprachen bezeichnet.

Beweis

Teil 1: Es gibt eine kontextfreie Sprache L, $\rightsquigarrow L \in \mathcal{L}_2$
die nicht regulär ist. $\rightsquigarrow L \notin \mathcal{L}_3$

Teil 2: Es gibt eine kontextsensitive Sprache L, $\rightsquigarrow L \in \mathcal{L}_1$
die nicht kontextfrei ist. $\rightsquigarrow L \notin \mathcal{L}_2$

Teil 3: Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache L, $\rightsquigarrow L \in \mathcal{L}_0$
die nicht kontextsensitiv ist. $\rightsquigarrow L \notin \mathcal{L}_1$

Beweis – Teil 3

Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache, die nicht kontextsensitiv ist.

Es sei L_u die universelle Sprache.

Wiederholung
Die **universelle Sprache** L_u über $\{0, 1\}$ ist definiert durch

$$L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}.$$

L_u ist also die Menge aller Wörter wv für die die DTM T_w bei der Eingabe v hält und v akzeptiert.

Beweis – Teil 3

Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache, die nicht kontextsensitiv ist.

Es sei L_u die universelle Sprache.

- Kapitel 3: L_u ist semi-entscheidbar (aber nicht entscheidbar).
- Wegen der Semi-entscheidbarkeit gilt $L_u \in \mathcal{L}_0$.
- **Da alle Sprachen in $\mathcal{L}_1$ entscheidbar sind, gilt $L_u \notin \mathcal{L}_1$**

- Sei L eine Sprache in $\mathcal{L}_1$. (Zum Beispiel $L = L_u$.)
- Dann gibt es eine NTM, die L mit linearem Speicher akzeptiert.
- Diese kann durch eine DTM simuliert werden.
- Mit beschränktem Speicher können nur endlich viele verschiedene Konfigurationen auftreten.
- Dann können Endlosschleifen erkannt werden.
- $\Longrightarrow$ Sprache L kann sogar entschieden werden.

Übersicht

Chomsky-Hierarchie	**Wortproblem** letzte Vorlesung	**Beispiele** heute
Chomsky-0	semi-entscheidbar NTM akzeptiert	universelle Sprache
Chomsky-1 kontextsensitiv	$\mathcal{NP}$-schwer $\mathcal{NTAPE}(n)$	$L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$
Chomsky-2 kontextfrei	polynomiell CYK-Algorithmus	$L = \{a^i b^i \mid i \geq 1\}$
Chomsky-3 regulär	linear DEA	$L = \{a^i \mid i \geq 1\}$

Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz:
Für eine kontextfreie Grammatik G kann in polynomieller Zeit entschieden werden, ob $L(G) = \emptyset$ ist.

Bemerkung: Für Chomsky-0 Grammatiken ist das nicht entscheidbar.

Satz:
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleenschem Abschluss.

Testen Sie sich: Für welche Sprachen gilt das auch?

Semi-entscheidbare Sprachen?
Kontextsensitive Sprachen?
Entscheidbare Sprachen?
Reguläre Sprachen?

Nutzlose Variablen

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Eine Variable A heißt **nutzlos**, falls es keine Ableitung $S \xrightarrow{*} w$ gibt, $w \in \Sigma^*$, in der A vorkommt.

Satz:
Für eine kontextfreie Grammatik kann die Menge der nutzlosen Variablen (in polynomialer Zeit) berechnet werden.

Beweis:

- Wir benutzen ein zweistufiges Verfahren.

Schritt 1

Bestimme alle Variablen, die ein Wort erzeugen können

Formal: Berechne $V' = \{A \in V \mid \exists w \in \Sigma^*\colon A \overset{*}{\to} w\}$

- Initialisiere eine leere Queue Q.
- Füge alle $A \in V$ mit $A \to w$ für ein $w \in \Sigma^*$ in Q und V' ein.
- Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q
  - Ersetze jede Regel
    $$B \to \alpha A \beta \text{ mit } \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$$
    durch die Regeln
    $$B \to \alpha w \beta, \text{ wobei } w \in \Sigma^* \text{ und } A \to w \text{ Regel.}$$
  - Wenn dabei eine Regel der Form
    $$B \to w',\ w' \in \Sigma^*,$$
    entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.
- Das Verfahren endet, wenn Q leer ist.

Schritt 1

Bemerkung 1

- Falls $S \notin V'$, breche das Verfahren ab (kein Schritt 2).
- G erzeugt dann die leere Sprache und alle Variablen sind nutzlos.

Bemerkung 2

- Für jede Variable A mit $A \xrightarrow{*} w$ für ein $w \in \Sigma^*$ gilt:
- Per Induktion über die Länge der kürzesten Ableitungsregel der Form $A \xrightarrow{*} w$ kann für A gezeigt werden, dass $A \in V'$.

Beispiel: Schritt 1

Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit Produktionen R gegeben durch

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow Aa|B|Cab \\
A &\rightarrow bc|A \\
B &\rightarrow Bd|Cd \\
C &\rightarrow aBc \\
D &\rightarrow Ab \\
E &\rightarrow SD
\end{aligned}
$$

Beispiel: Schritt 1

Füge alle $A \in V$ mit $A \to w$ für ein $w \in \Sigma^*$ in Q und V' ein.

$$\begin{aligned} S &\to Aa|B|Cab \\ A &\to bc|A \\ B &\to Bd|Cd \\ C &\to aBc \\ D &\to Ab \\ E &\to SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \emptyset \\ Q &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\to Aa|B|Cab \\ A &\to bc|A \\ B &\to Bd|Cd \\ C &\to aBc \\ D &\to Ab \\ E &\to SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A\} \\ Q &= \{A\} \end{aligned}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \rightarrow \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \rightarrow \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \rightarrow w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \rightarrow w'$, $w' \in \Sigma^*$, entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & Aa|B|Cab \\
A & \rightarrow & bc|A \\
B & \rightarrow & Bd|Cd \\
C & \rightarrow & aBc \\
D & \rightarrow & Ab \\
E & \rightarrow & SD \\
\\
V' & = & \{A\} \\
Q & = & \{A\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & \color{red}{bc}a|B|Cab \\
A & \rightarrow & bc|A \\
B & \rightarrow & Bd|Cd \\
C & \rightarrow & aBc \\
D & \rightarrow & \color{red}{bc}b \\
E & \rightarrow & SD \\
\\
V' & = & \{A, \color{red}{S}, \color{red}{D}\} \\
Q & = & \{S, D\}
\end{array}
$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \to \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \to \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \to w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \to w'$, $w' \in \Sigma^*$, entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$\begin{aligned} S &\to bca|B|Cab \\ A &\to bc|A \\ B &\to Bd|Cd \\ C &\to aBc \\ D &\to bcb \\ E &\to SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D\} \\ Q &= \{S, D\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\to bca|B|Cab \\ A &\to bc|A \\ B &\to Bd|Cd \\ C &\to aBc \\ D &\to bcb \\ E &\to bcaD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D\} \\ Q &= \{D\} \end{aligned}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \rightarrow \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \rightarrow \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \rightarrow w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \rightarrow w'$, $w' \in \Sigma^*$, entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & bca|B|Cab \\ A & \rightarrow & bc|A \\ B & \rightarrow & Bd|Cd \\ C & \rightarrow & aBc \\ D & \rightarrow & bcb \\ E & \rightarrow & bcaD \\ \\ V' & = & \{A, S, D\} \\ Q & = & \{D\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & bca|B|Cab \\ A & \rightarrow & bc|A \\ B & \rightarrow & Bd|Cd \\ C & \rightarrow & aBc \\ D & \rightarrow & bcb \\ E & \rightarrow & bca\color{red}{bcb} \\ \\ V' & = & \{A, S, D, \color{red}{E}\} \\ Q & = & \{\color{red}{E}\} \end{array}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \to \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \to \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \to w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \to w'$, $w' \in \Sigma^*$, entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$\begin{aligned} S &\to bca|B|Cab \\ A &\to bc|A \\ B &\to Bd|Cd \\ C &\to aBc \\ D &\to bcb \\ E &\to bcabcb \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D, E\} \\ Q &= \{E\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\to bca|B|Cab \\ A &\to bc|A \\ B &\to Bd|Cd \\ C &\to aBc \\ D &\to bcb \\ E &\to bcabcb \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D, E\} \\ Q &= \{\} \end{aligned}$$

Schritt 2

Bestimme alle Variablen in V', die vom Startsymbol aus “erreicht” werden können.

Formal: Berechne $\{A \in V' \mid S = A \text{ oder } \exists \alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^* \colon S \xrightarrow{*} \alpha A \beta\}$.

- Starte mit $V'' = \{S\}$.
- Füge zu allen Regeln $A \to \alpha B \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, $A \in V''$, $B \in V'$ die Variable B in V'' ein.
- Wiederhole den letzen Schritt, bis sich V'' nicht mehr ändert.

Per Induktion über die Länge der kürzesten Ableitungsregel der Form $S \to \alpha A \beta$, $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, kann dann wieder die Korrektheit bewiesen werden.

Fazit: Nach Ende von Schritt 2 ist V'' die Menge aller nützlichen Variablen.

Beispiel: Schritt 2

Starte mit $V'' = \{S\}$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow Aa|B|Cab \\
A &\rightarrow bc|A \\
B &\rightarrow Bd|Cd \\
C &\rightarrow aBc \\
D &\rightarrow Ab \\
E &\rightarrow SD
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V' &= \{A, S, D, E\} \\
V'' &= \{\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow Aa|B|Cab \\
A &\rightarrow bc|A \\
B &\rightarrow Bd|Cd \\
C &\rightarrow aBc \\
D &\rightarrow Ab \\
E &\rightarrow SD
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V' &= \{A, S, D, E\} \\
V'' &= \{S\}
\end{aligned}
$$

Beispiel: Schritt 2

Füge zu allen Regeln $A \to \alpha B \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, $A \in V''$, $B \in V'$ die Variable B in V'' ein.

$$\begin{array}{lcl} S & \to & Aa|B|Cab \\ A & \to & bc|A \\ B & \to & Bd|Cd \\ C & \to & aBc \\ D & \to & Ab \\ E & \to & SD \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} S & \to & Aa|B|Cab \\ A & \to & bc|A \\ B & \to & Bd|Cd \\ C & \to & aBc \\ D & \to & Ab \\ E & \to & SD \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} V' & = & \{A, S, D, E\} \\ V'' & = & \{S\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} V' & = & \{A, S, D, E\} \\ V'' & = & \{S, A\} \end{array}$$

Beispiel: Schritt 2

Wiederhole den letzen Schritt, bis sich V'' nicht mehr ändert.

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow Aa|B|Cab \\
A &\rightarrow bc|A \\
B &\rightarrow Bd|Cd \\
C &\rightarrow aBc \\
D &\rightarrow Ab \\
E &\rightarrow SD
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V' &= \{A, S, D, E\} \\
V'' &= \{S, A\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow Aa|B|Cab \\
A &\rightarrow bc|A \\
B &\rightarrow Bd|Cd \\
C &\rightarrow aBc \\
D &\rightarrow Ab \\
E &\rightarrow SD
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V' &= \{A, S, D, E\} \\
V'' &= \{S, A\}
\end{aligned}
$$

Leere kontextfreie Sprachen

Karlsruher Institut für Technologie

Korollar
Für eine kontextfreie Grammatik G kann (in polynomialer Zeit) entschieden werden, ob $L(G) = \emptyset$ ist.

Beweis:

- $L(G) = \emptyset$ genau dann, wenn S nutzlos.

Endliche kontextfreie Sprachen

Satz:
Für eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ kann (in polynomialer Zeit) entschieden werden, ob $L(G)$ endlich ist.

Beweis:

- Entferne alle nutzlosen Variablen
- Überführe G in eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform.
- Betrachte den gerichteten Graphen (V, E) mit
  - Knotenmenge V ist gleich der Variablenmenge von G
  - Kantenmenge $E = \{(A, B) \mid \exists C \in V\colon A \to BC \in R \vee A \to CB \in R\}$
- Mit Tiefensuche kann entschieden werden, ob dieser Graph einen gerichteten Kreis enthält.
- Man kann sich leicht überlegen, dass $L(G)$ genau dann endlich ist, wenn der entsprechende Graph keinen gerichteten Kreis enthält.

Beispielgraph

$S \rightarrow AB$
$A \rightarrow BC$
$B \rightarrow BC$
$A \rightarrow a$
$B \rightarrow b$
$C \rightarrow c$