2. Klausur zur Vorlesung
Theoretische Grundlagen der Informatik
Wintersemester 2019/2020

Lösung!

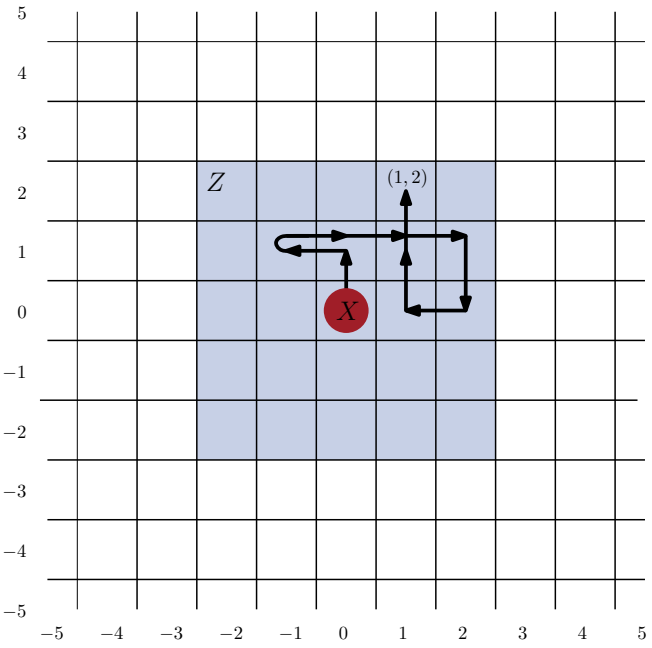
Beachten Sie:

- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer auf diesem Deckblatt an und beschriften Sie jedes Aufgabenblatt mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
- Schreiben Sie die Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Am Ende der Klausur sind zusätzliche Leerseiten. Fordern Sie zusätzliches Papier bitte nur an, falls Sie den gesamten Platz aufgebraucht haben.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

	Mögliche Punkte							Erreichte Punkte						
	a	b	c	d	e	f	Σ	a	b	c	d	e	f	Σ
Aufg. 1	3	4	1	–	–	–	8				–	–	–	
Aufg. 2	1	2	2	3	–	–	8					–	–	
Aufg. 3	3	4	–	–	–	–	7			–	–	–	–	
Aufg. 4	1	3	1	2	1	2	10							
Aufg. 5	8						8							
Aufg. 6	2	1	3	1	2	3	12							
Aufg. 7	1	1	2	2	1	–	7						–	
Σ							60							

Problem 1: Reguläre Sprachen $3 + 4 + 1 = 8$ Punkte

Ein Roboter X bewegt sich auf einem unendlichen zweidimensionalen Gitter. Seine Startposition ist das Feld $(0, 0)$. In jedem Schritt kann sich der Roboter ein Feld nach oben, unten, links oder rechts bewegen.



Wir kodieren eine Folge von Zügen als Wort über dem Alphabet $\Sigma = \{\texttt{O}, \texttt{U}, \texttt{L}, \texttt{R}\}$. Zum Beispiel kodiert das Wort `OLRRRULOO` die Zugfolge oben-links-rechts-rechts-rechts-unten-links-oben-oben, die in der Abbildung dargestellt ist. Nach dieser Zugfolge befindet sich der Roboter auf dem Feld $(1, 2)$.

Wir nennen das Quadrat von $5{\times}5$ Feldern um den Startpunkt $(0, 0)$ herum das *Zuhause* des Roboters. Formal ist das die Menge von Feldern $Z = \{(i, j) \mid i, j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\}$.

Zeigen Sie:

(a) Die Sprache $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid X \text{ verlässt während Zugfolge } w \text{ nie } Z\}$ ist regulär. Geben Sie dazu einen endlichen Automaten an, der L_1 akzeptiert.

(b) Die Sprache $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid X \text{ befindet sich am Ende von } w \text{ in } Z\}$ ist nicht regulär. Verwenden Sie dazu das Pumping-Lemma.

(c) Die Sprache $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid X \text{ befindet sich am Ende von } w \text{ nicht in } Z\}$ ist nicht regulär.

Hinweis: Sie müssen hierzu nicht das Pumping-Lemma verwenden!

Lösung:

(a) Der endliche Automat $\mathcal{A} = (Z \cup \{f\}, \Sigma, \delta, (0,0), Z)$ mit

$$\delta((i,j),\texttt{O}) = \begin{cases} (i,j+1) & j < 2 \\ f & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i,j) \in Z$$

$$\delta((i,j),\texttt{U}) = \begin{cases} (i,j-1) & j > -2 \\ f & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i,j) \in Z$$

$$\delta((i,j),\texttt{L}) = \begin{cases} (i-1,j) & i > -2 \\ f & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i,j) \in Z$$

$$\delta((i,j),\texttt{R}) = \begin{cases} (i+1,j) & i < 2 \\ f & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i,j) \in Z$$

$$\delta(f,x) = f \qquad x \in \Sigma$$

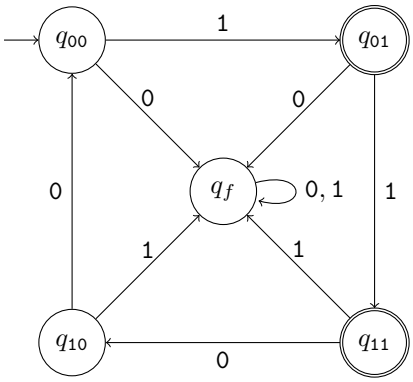
akzeptiert genau L_1. Die akzeptierenden Zustände von $\mathcal{A}$ entsprechen genau den Feldern von Z. Zusätzlich gibt es einen Fehlerzustand f. Die Überführungsfunktion simuliert genau die Bewegung des Roboters, sodass der aktuelle Zustand immer dem Feld entspricht, auf dem sich der Roboter gerade befindet. Am Rand von Z sind die Zustände mit f verbunden, sodass ein Schritt aus Z heraus dazu führt, dass die Zugfolge abgelehnt wird.

(b) Zeige: L_2 erfüllt nicht die Aussage des Pumping-Lemmas. Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Wort $w = \texttt{U}^n\texttt{O}^n$. Offensichtlich gilt $|w| > n$ und $w \in L_2$. Für jede Zerlegung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$ gilt $v = \texttt{U}^j$ mit $1 \leq j \leq n$. Für $i = 4$ gilt $uv^ix = \texttt{U}^{n+3j}\texttt{O}^n$. Nach dieser Zugfolge steht der Roboter auf dem Feld $(0, -3j) \notin Z$. Also gilt $uv^4x \notin L_2$.

(c) Es gilt $L_3 = L_2^c$. Angenommen, L_3 sei regulär. Da reguläre Sprachen unter Komplementbildung abgeschlossen sind, wäre dann auch L_2 regulär, ein Widerspruch zu Aufgabenteil (b).

Problem 2: Endliche Automaten mit Gedächtnis $1 + 2 + 2 + 3 = 8$ Punkte

Gegeben sei folgender deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A}$:

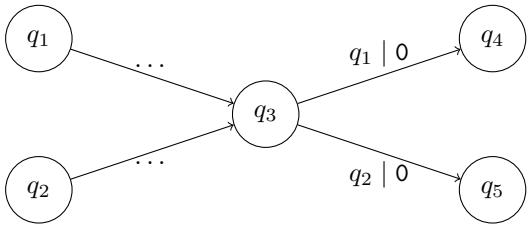


(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache $L(\mathcal{A})$ an, die von $\mathcal{A}$ erkannt wird.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ minimal ist.

Ein *deterministischer endlicher Automat mit Gedächtnis* (DEAG) ist ein deterministischer endlicher Automat mit einer Überführungsfunktion $\delta\colon Q \times Q \times \Sigma \to Q$, die als Eingabe nicht nur den aktuellen Zustand bekommt, sondern auch den Zustand, der im vorigen Schritt besucht wurde.

Beispiel:



Wenn im Zustand q_3 eine 0 gelesen wird, hängt es vom vorigen Zustand ab, welcher Übergang genommen wird: Wenn q_3 über q_1 erreicht wurde, wird der Übergang nach q_4 genommen. Wenn q_3 dagegen über q_2 erreicht wurde, wird der Übergang nach q_5 genommen.

Achtung: Wenn gerade das erste Zeichen der Eingabe gelesen wird, befindet sich der Automat im Startzustand s und es gab noch keinen vorigen Schritt. In diesem Fall legen wir fest, dass der Automat im „vorigen Schritt“ ebenfalls im Startzustand war.

(c) Geben Sie einen DEAG mit 2 Zuständen (ohne Fehlerzustand) an, der $L(\mathcal{A})$ erkennt.

(d) Beschreiben Sie, wie für jeden DEAG ein äquivalenter DEA (ohne Gedächtnis) konstruiert werden kann. Begründen Sie, warum Ihre Konstruktion korrekt ist!

Lösung:

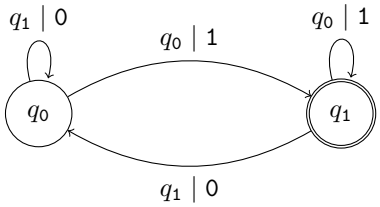
(a) $(1100)^*(1 \cup 11)$

(b) Wende die Äquivalenzklassenkonstruktion an:

Zeuge	Äquivalenzklassen
ε	$\{q_{00}, q_{10}, q_f\}$, $\{q_{01}, q_{11}\}$
0	$\{q_{00}, q_{10}, q_f\}$, $\{q_{01}, q_{11}\}$
1	$\{q_{00}\}$, $\{q_{10}, q_f\}$, $\{q_{01}\}$, $\{q_{11}\}$
00	$\{q_{00}\}$, $\{q_{10}, q_f\}$, $\{q_{01}\}$, $\{q_{11}\}$
01	$\{q_{00}\}$, $\{q_{10}\}$, $\{q_f\}$, $\{q_{01}\}$, $\{q_{11}\}$

Jeder Zustand wird in seine eigene Äquivalenzklasse eingeteilt, also war der Automat bereits minimal.

(c) Betrachte folgenden DEAG:



(d) Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein beliebiger DEAG. Dann akzeptiert folgender DEA ohne Gedächtnis dieselbe Sprache: $\mathcal{A}' = (Q \times Q, \Sigma, \delta', (s, s), Q \times F)$ mit $\delta'((y, z), a) = (z, \delta(y, z, a))$. Durch Induktion ergibt sich für beliebige $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^+$: $\delta'((s, s), w) = (\delta(s, s, w_1 \dots w_{n-1}), \delta(s, s, w))$. Offensichtlich gilt $\delta(s, s, w) \in F$ genau dann, wenn $w \in L(\mathcal{A})$. Genau in diesem Fall gilt $\delta'((s, s), w) \in Q \times F$. Also erkennt $\mathcal{A}'$ genau $L(\mathcal{A})$.

Problem 3: Turing-Maschinen mit Lesezeichen 3 + 4 = 7 Punkte

Wir erweitern das Berechnungsmodell der Turing-Maschine (ein Kopf, ein Band, eine Spur) folgendermaßen. Zusätzlich zum Kopf verfügt die Turing-Maschine über ein *Lesezeichen*. Anfangs befindet sich dieses auf der Startposition des Kopfes. Neben den üblichen Operationen kann sich die Turing-Maschine nun in jedem Schritt entschließen, das Lesezeichen auf die aktuelle Kopfposition zu verschieben. Das Bandsymbol an dieser Position wird dadurch nicht gelöscht.

Außerdem ist es möglich, von der aktuellen Position zum Lesezeichen zu springen. Sowohl das Verschieben des Lesezeichens als auch das Springen zum Lesezeichen benötigen jeweils einen Zeitschritt. Durch das Springen zum Lesezeichen können also größere Distanzen in einem Zeitschritt überwunden werden. Wir bezeichnen dieses Modell als *Lesezeichen-Turing-Maschine* (LTM).

Betrachten Sie folgende (herkömmliche) Turing-Maschine, die die Palindromsprache erkennt. Sie startet auf dem linkesten Eingabesymbol, merkt sich dieses, löscht es, geht zum rechtesten Symbol und vergleicht dieses mit dem gemerkten Symbol. Sind die Symbole unterschiedlich, wird das Wort abgelehnt. Andernfalls wird das rechteste Symbol gelöscht, die Turing-Maschine geht zurück zum linkesten verbleibenden Symbol und der Ablauf beginnt erneut. Die Eingabe wird akzeptiert, wenn alle Symbole der Eingabe gelöscht wurden.

(a) Beschreiben Sie, wie eine LTM auf Grundlage der oben beschriebenen TM das Lesezeichen ausnutzen kann, um die Palindromsprache ungefähr doppelt so schnell zu entscheiden.

Lösung:
Platziere das Lesezeichen immer am linkesten noch nicht gelesenen Symbol. Anstatt zurückzulaufen, kann direkt zum Lesezeichen gesprungen werden. Dadurch wird alles Nach-Links-Laufen, also ca. die Hälfte der Schritte gespart.

(b) Zeigen Sie, dass eine LTM eine Sprache höchstens doppelt so schnell wie eine herkömmliche Turing-Maschine entscheiden kann.

Lösung:
Sei T eine LTM und T' eine (herkömmliche) TM, die aus T entsteht, indem anstatt dem Springen zum Lesezeichen der Kopf in einzelnen Schritten an die entsprechende Position bewegt wird. Jedem Sprung zum Lesezeichen von T geht entweder das Setzen des Lesezeichens oder ein vorheriger Sprung zum Lesezeichen voraus. Wenn der Kopf zum Zeitpunkt des Sprungs x Felder vom Lesezeichen entfernt ist, so muss T in der Zwischenzeit mindestens x Schritte gemacht haben, um den Kopf dorthin zu bewegen. Da T' genau x Schritte braucht, um den Sprung zu simulieren, macht T' höchstens doppelt so viele Schritte wie T.

Problem 4: Entscheidbarkeit $1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 2 = 10$ Punkte

Sei $L \neq \emptyset$ eine entscheidbare Sprache. Betrachte das Suchproblem Π:

Gegeben:	Turing-Maschine $\mathcal{M}$, für die gilt: • Es gibt ein Wort $x \in L$, sodass $L(\mathcal{M}) = L \setminus \{x\}$ gilt.
Ausgabe:	x

(a) Zeigen Sie, dass $L(\mathcal{M})$ entscheidbar ist.

Anmerkung: $\mathcal{M}$ hält nicht notwendigerweise auf allen Eingaben.

(b) Gehen Sie ab jetzt davon aus, dass M auf allen Eingaben hält. Zeigen Sie, dass eine Turing-Maschine $\mathcal{M}_\Pi$ existiert, die Π löst, d.h. für eine Eingabe $\mathcal{M}$ das gesuchte x berechnet.

Nun erlauben wir zusätzlich auch den Fall, dass $L(\mathcal{M}) = L$ gilt, also dass kein Wort x fehlt. In diesem Fall soll das Platzhalterzeichen $\perp$ ausgegeben werden. Wir erhalten also das Suchproblem Λ:

Gegeben:	Turing-Maschine $\mathcal{M}$, für die gilt: • **Fall 1:** Es gibt ein Wort $x \in L$, sodass $L(\mathcal{M}) = L \setminus \{x\}$ gilt. **oder** • **Fall 2:** $L(\mathcal{M}) = L$
Ausgabe:	• **In Fall 1:** x • **In Fall 2:** $\perp$

(c) Wieso kann $\mathcal{M}_\Pi$ nicht angepasst werden, um Λ zu lösen?

Nun interessiert uns das konkrete x nicht mehr. Wir wollen nur noch wissen, ob $L(\mathcal{M}) = L$ gilt. Wir erhalten das Entscheidungsproblem Γ:

Gegeben:	Turing-Maschine $\mathcal{M}$, für die gilt: • **Fall 1:** Es gibt ein Wort $x \in L$, sodass $L(\mathcal{M}) = L \setminus \{x\}$ gilt. **oder** • **Fall 2:** $L(\mathcal{M}) = L$
Frage:	Gilt Fall 1 oder Fall 2?

Wir wollen nun zeigen, dass Γ unentscheidbar ist. Seien zunächst ein Wort $x \in L$, eine Turing-Maschine $\mathcal{N}$ und ein Wort $v \in \Sigma^*$ gegeben. Wir wollen eine Turing-Maschine $\mathcal{X}$ konstruieren, für die gilt:

$$L(\mathcal{X}) = \begin{cases} L & \text{falls } \mathcal{N} \text{ auf } v \text{ hält} \\ L \setminus \{x\} & \text{sonst} \end{cases}$$

(d) Vervollständigen Sie folgende Aussage:

$$w \in L(\mathcal{X}) \Leftrightarrow \begin{cases} \qquad\qquad & \text{falls } w \neq x \\ \qquad\qquad & \text{falls } w = x \end{cases}$$

(e) Beschreiben Sie, wie $\mathcal{X}$ konstruiert werden kann.

(f) Zeigen Sie, dass Γ unentscheidbar ist. Verwenden Sie nicht den Satz von Rice! Nehmen Sie an, dass eine Turing-Maschine $\mathcal{M}_\Gamma$ existiert, die Γ entscheidet. Führen Sie diese Annahme zum Widerspruch, indem Sie eine Turing-Maschine $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ konstruieren, die das Halteproblem entscheidet.

Setzen Sie die Turing-Maschine $\mathcal{X}$ auf geeignete Weise ein. Sie können ohne Beweis die Tatsache verwenden, dass sich ein Wort $x \in L$ in endlicher Zeit generieren lässt.

Lösung:

(a) Da L entscheidbar ist, existiert eine Turing-Maschine, die L entscheidet. Erweitere diese um die zusätzliche Überprüfung, ob die Eingabe x ist, und lehne in diesem Fall ab.

(b) Da L entscheidbar ist, existiert eine Turing-Maschine $\mathcal{M}_L$, die L rekursiv aufzählt, d.h. jedes Wort aus L nach endlich vielen Schritten generiert. Simuliere $\mathcal{M}_L$ und überprüfe für jedes generierte Wort $w \in L$ durch Simulation von $\mathcal{M}$, ob $w \in L(\mathcal{M})$ gilt. Falls $w \notin L(\mathcal{M})$, gilt $w = x$, also gib w aus. Ansonsten suche weiter. Da $\mathcal{M}_L$ nach endlich vielen Schritten x generieren wird, wird $\mathcal{M}_\Pi$ nach endlicher Zeit halten.

(c) Falls $L(\mathcal{M}) = L$ gilt, dann wird jedes generierte Wort in $L(\mathcal{M})$ liegen. Also läuft $\mathcal{M}_\Lambda$ dann in einer Endlosschleife.

(d)
$$w \in L(\mathcal{X}) \Leftrightarrow \begin{cases} w \in L & \text{falls } w \neq x \\ \mathcal{N} \text{ hält auf } v & \text{falls } w = x \end{cases}$$

(e) Sei w das Eingabewort von $\mathcal{X}$. Überprüfe zunächst, ob $w = x$ gilt. Falls nein, simuliere die Turing-Maschine, die L entscheidet, mit der Eingabe w und akzeptiere genau dann, wenn $w \in L$ gilt. Falls ja, simuliere $\mathcal{N}$ auf v und akzeptiere genau dann, wenn $\mathcal{N}$ hält.

(f) Seien $\mathcal{N}$ und v die Eingabe von $\mathcal{M}_\mathcal{H}$. Generiere ein Wort $x \in L$. Konstruiere nun die Turing-Maschine $\mathcal{X}$ wie in Aufgabenteil (e) beschrieben. Simuliere $\mathcal{M}_\Gamma$ mit der Eingabe $\mathcal{X}$. $\mathcal{M}_\Gamma$ akzeptiert genau dann, wenn $L(\mathcal{X}) = L$ gilt. Nach Konstruktion von $\mathcal{X}$ ist das genau dann der Fall, wenn $\mathcal{N}$ auf x hält. Also entscheidet $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ das Halteproblem.

Problem 5: NP-Vollständigkeit 8 Punkte

Aus der Vorlesung kennen Sie das NP-vollständige Entscheidungsproblem SAT.

Eine Klausel heißt *monoton*, wenn sie entweder nur positive Literale oder nur negative Literale enthält. Zum Beispiel sind $x \vee y \vee z$ und $\bar{x} \vee \bar{y}$ monoton, wohingegen $x \vee \bar{y} \vee z$ nicht monoton ist. Eine SAT-Instanz heißt *monoton*, wenn alle darin vorkommenden Klauseln monoton sind. Es ergibt sich das Entscheidungsproblem MONOTONESAT (MSAT):

Gegeben:	Menge U von n Variablen Menge C von k monotonen Klauseln über U
Frage:	Existiert eine Wahrheitsbelegung von U, die C erfüllt?

Zeigen Sie, dass MONOTONESAT NP-vollständig ist. Geben Sie bei Ihrer Reduktion explizit an, von welchem Problem auf welches reduziert wird!

Lösung:
Offensichtlich kann eine MONOTONESAT-Instanz genau wie eine SAT-Instanz auf Erfüllbarkeit geprüft werden. Da SAT in NP liegt, wissen wir bereits, dass das in polynomieller Zeit machbar ist.

Wir geben nun eine polynomielle Reduktion von SAT auf MONOTONESAT an. Sei (U, C) eine SAT-Instanz. Erzeuge für jede Variable $v \in U$ zwei Variablen v_p, v_n, die jeweils für das positive bzw. negative Literal stehen. Die Variablen v_p, v_n müssen unterschiedliche Wahrheitsbelegungen erhalten, was z.B. durch die monotonen Klauseln $(v_p \vee v_n) \wedge (\bar{v}_p \vee \bar{v}_n)$ zu erreichen ist. Ersetze in jeder Klausel von C jedes positive Literal v durch v_p und jedes negative Literal $\bar{v}$ durch v_n. Nachdem dies für alle Variablen durchgeführt wird, enthalten alle Klauseln aus C nur noch positive Literale und sind damit monoton. Die Konstruktion ist in Zeit $\mathcal{O}(nk)$ durchführbar.

Sei (U, C) die SAT-Instanz und sei (U', C') die daraus konstruierte MONOTONESAT-Instanz. Sei $\varphi : U \to \{0, 1\}$ eine erfüllende Wahrheitsbelegung von (U, C). Konstruiere $\varphi' : U' \to \{0, 1\}$ wie folgt. Für jedes $v \in U$ setze $\varphi'(v_p) = \varphi(v)$ und $\varphi'(v_n) = 1 - \varphi'(v_p) = 1 - \varphi(v)$. Dadurch sind die Klauseln $(v_p \vee v_n) \wedge (\bar{v}_p \vee \bar{v}_n)$ erfüllt. Eine Klausel in C ist durch ein positives Literal v genau dann erfüllt, wenn die entsprechende Klausel in C' durch v_p erfüllt. Eine Klausel in C ist durch ein negatives Literal $\bar{v}$ genau dann erfüllt, wenn die entsprechende Klausel in C' durch v_n erfüllt. Damit ist φ' eine erfüllende Wahrheitsbelegung von (U', C'). Weil nach Konstruktion $\varphi'(v_n) = 1 - \varphi'(v_p)$ gilt, kann dieselbe Argumentation auch in umgekehrter Richtung verwendet werden, um aus der Erfüllbarkeit von (U', C') die Erfüllbarkeit von (U, C) zu folgern.

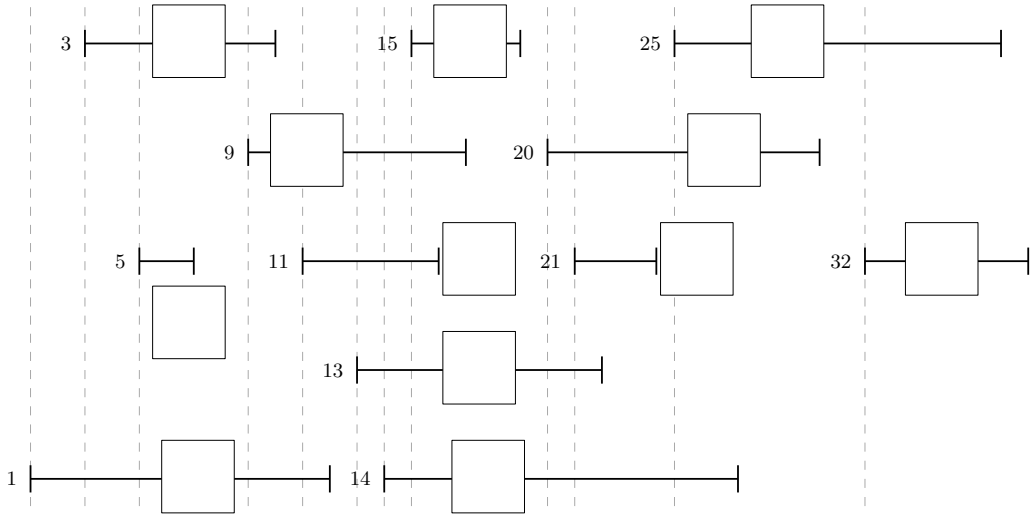
Problem 6: Approximation $2 + 1 + 3 + 1 + 2 + 3 = 12$ Punkte

Gegeben sei eine Menge M von n endlichen Intervallen über den natürlichen Zahlen. Sie dürfen davon ausgehen, dass alle Intervallgrenzen und -größen paarweise verschieden sind. Eine Färbung von M ist eine Funktion $\varphi : M \to C$, sodass für $x, y \in M$ mit $x \neq y$ und $x \cap y \neq \emptyset$ gilt, dass $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Überlappende Intervalle müssen also verschiedene Farben haben. Eine k-Färbung von M ist eine Färbung $\varphi : M \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Das Optimierungsproblem INTERVALLEFÄRBEN (IF) besteht darin, das kleinste k zu bestimmen, sodass es eine k-Färbung von M gibt.

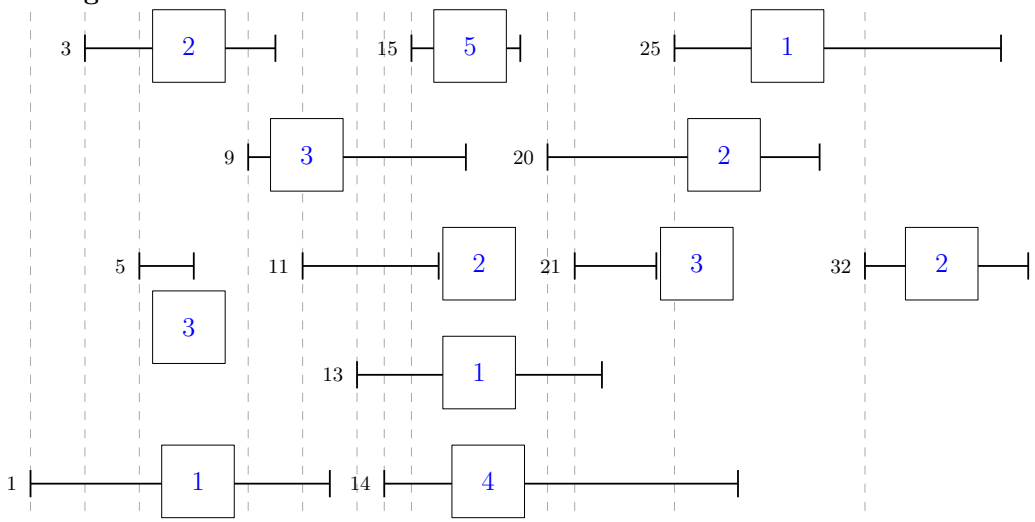
Algorithmus A funktioniert wie folgt. Wähle die natürlichen Zahlen $\{1, 2, \ldots\}$ als Farbkandidaten. Betrachte die Intervalle **gemäß ihrer unteren Grenze in aufsteigender Reihenfolge**. Berechne bei Betrachtung eines Intervalls $x = [a, b]$ alle Intervalle außer x, welche a enthalten. (Das müssen nicht alle Intervalle sein, die x schneiden.) Wähle die kleinste natürliche Zahl, die keinem dieser Intervalle zugewiesen wurde, als Farbe von x.

(a) Führen Sie Algorithmus A auf folgendem Beispiel aus.

Schreiben Sie die Farben in die weißen Quadrate. Die Zahlen entsprechen den unteren Grenzen der jeweiligen Intervalle.



Lösung:



(b) Beweisen Sie, dass Algorithmus A eine Färbung von M berechnet.

Lösung:
Der Algorithmus A weist jedem Intervall $m \in M$ eine Farbe $\varphi(m)$ zu, $\varphi : M \to \mathbb{N}$ ist also eine wohldefinierte Funktion. Betrachte nun zwei Intervalle $x = [a, b], y = [c, d]$ mit $x \cap y \neq \emptyset$. O.B.d.A. sei $a < c$. Dann färbt A erst x und dann y. Es ist $c \in x$, also weist A dem Intervall y eine andere Farbe als $\varphi(x)$ zu, d.h. $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Damit ist φ eine Färbung.

(c) Beweisen Sie, dass Algorithmus A eine Färbung minimaler Größe berechnet.

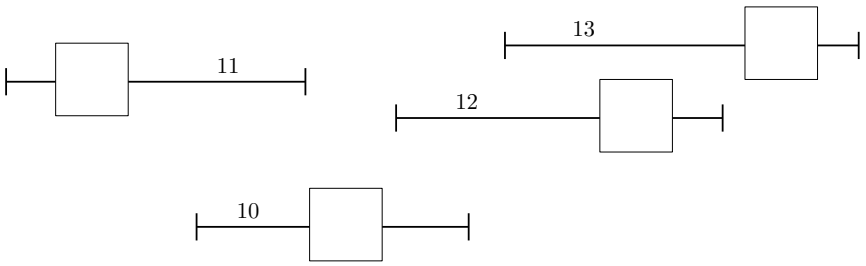
Hinweis: Betrachten Sie beim Berechnen einer k-Färbung den Zeitpunkt, in dem die k-te Farbe erstmals zugewiesen wird.

Lösung:
Sei $[a, b]$ ein Intervall, dem die Farbe k zugewiesen wird. Die Farben $1, 2, \ldots, k-1$ sind also bereits anderen Intervallen zugewiesen, die jeweils a enthalten. Dann gibt es k Intervalle, die sich paarweise schneiden. Diese müssen alle eine unterschiedliche Farbe erhalten.

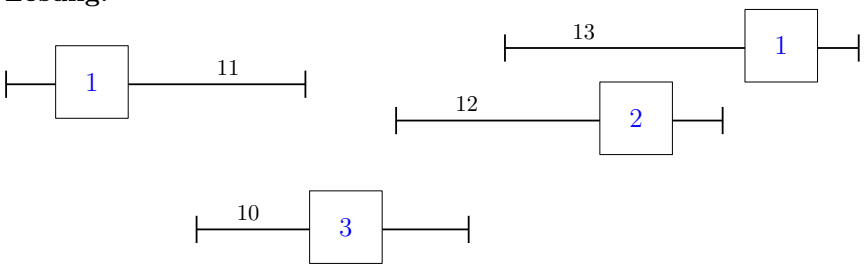
Algorithmus B funktioniert wie folgt. Wähle wieder die natürlichen Zahlen $\{1, 2, \dots\}$ als Farbkandidaten. Betrachte die Intervalle **gemäß ihrer Größe in absteigender Reihenfolge**. Berechne bei Betrachtung eines Intervalls $x = [a, b]$ alle Intervalle außer x, die a oder b enthalten. (Das müssen nicht alle Intervalle sein, die x schneiden.) Wähle die kleinste natürliche Zahl, die keinem dieser Intervalle zugewiesen wurde als Farbe von x.

(d) Führen Sie Algorithmus B auf folgendem Beispiel aus.

Schreiben Sie die Farben in die weißen Quadrate. Die Zahlen entsprechen den Größen der jeweiligen Intervalle.



Lösung:



(e) Zeigen Sie, dass Algorithmus B eine Färbung von M berechnet.

Lösung:
Überschneiden sich zwei Intervalle, so ist mindestens eine Grenze des kürzeren Intervalls im größeren Intervall enthalten. Der Algorithmus B weist jedem Intervall $m \in M$ eine Farbe $\varphi(m)$ zu, $\varphi : M \to \mathbb{N}$ ist also eine wohldefinierte Funktion. Betrachte nun zwei Intervalle $x = [a, b], y = [c, d]$ mit $x \cap y \neq \emptyset$. O.B.d.A. sei $|x| > |y|$. Dann färbt B erst x und dann y. Wegen $|x| > |y$ gilt nicht $c < a$ und $d > b$. Wegen $x \cap y \neq \emptyset$ gilt dann $c \in x$ oder $d \in x$. Also weist B dem Intervall y eine andere Farbe als $\varphi(x)$ zu, d.h. $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Damit ist φ eine Färbung.

(f) Beweisen Sie, dass Algorithmus B ein Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 für das Optimierungsproblem IntervalleFärben ist.

Lösung:
Betrachte das Färben eines Intervalls $x = [a, b]$. Sei k_1 (k_2) die Anzahl an bereits gefärbten Intervallen, die a (b) enthalten. Algorithmus B weist dem Intervall x dann eine Farbe $\varphi(x) \leq k_1 + k_2 + 1$ zu. Sowohl $k_1 + 1$ als auch $k_2 + 1$, und damit auch $\max(k_1, k_2) + 1$ sind untere Schranken an die optimale Lösung. Wegen $\varphi(x) \leq 2\,(\max(k_1, k_2) + 1)$ folgt, dass B ein Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 für das Optimierungsproblem IntervalleFärben ist.

Problem 7: Grammatiken $1 + 1 + 2 + 2 + 1 = 7$ Punkte

Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ eine Grammatik mit endlichem Alphabet Σ, Variablenmenge V, Startsymbol $S \in V$ und einer Menge von Ableitungsregeln R. Jede Ableitungsregel ist von einem der folgenden drei Typen:

(1) $S \to \varepsilon$

(2) $A \to a$ mit $A \in V$ und $a \in \Sigma$

(3) $\alpha \to \beta$ mit $\alpha \in V^\star$, $\beta \in (V \setminus \{S\})^\star$, wobei $1 \leq |\alpha| \leq 2$ und $|\alpha| \leq |\beta|$

Insbesondere ist G eine kontextsensitive Grammatik.

(a) Zeigen Sie, dass es eine zu G äquivalente kontextsensitive Grammatik gibt, bei der für alle Regeln vom Typ (3) zusätzlich $|\beta| \leq 2$ gilt.

Lösung:
Gehe vor wie in Schritt 2 der Umformung einer kontextfreien Grammatik in Chomsky-Normalform. Betrachte eine Regel $\alpha \to B_1 \dots B_m$. Entferne diese Regel und führe neue Variablen $C_1, \dots, C_{m-2}$ und folgende Ableitungsregeln ein.

$$\begin{aligned} \alpha &\to B_1 C_1 \\ C_i &\to B_{i+1} C_{i+1} \text{ für } 1 \leq i \leq m-3 \\ C_{m-2} &\to B_{m-1} B_m \end{aligned}$$

(b) Gibt es eine zu G äquivalente Grammatik, bei der $|\beta| \leq 1$ für alle Regeln vom Typ (3) gilt? Beweisen oder widerlegen Sie!

Lösung:
Nein, denn so könnte man höchstens Wörter der Länge Eins erzeugen.

Ab jetzt lassen wir die Forderung $|\alpha| \leq 2$ fallen. Die Ableitungsregeln haben also die Form:

(1) $S \to \varepsilon$

(2) $A \to a$ mit $A \in V$ und $a \in \Sigma$

(3) $\alpha \to \beta$ mit $\alpha \in V^\star$, $\beta \in (V \setminus \{S\})^\star$ und $1 \leq |\alpha| \leq |\beta|$

Das sind genau die Forderungen, die wir an kontextsensitive Grammatiken stellen.

(c) Betrachten Sie den Fall, dass unter Ausnahme genau einer Regel $ABC \to XYZ$ für jede Regel von Typ (3) $|\alpha| = |\beta| = 2$ gilt. Konstruieren Sie eine zu G äquivalente Grammatik, bei der für jede Regel (ohne Ausnahme) von Typ (3) $|\alpha| = |\beta| = 2$ gilt.

Lösung:
Entferne die Ableitungsregel $ABC \to XYZ$ und führe die neue Variable $\square$ und folgende Ableitungsregeln ein.

$$\begin{aligned} AB &\to X\square \\ \square C &\to YZ \end{aligned}$$

(d) Erweitern Sie Ihren Ansatz aus (c) um zu zeigen, dass Sie für Ableitungen von Typ (3) $|\alpha| \leq 2$ fordern können.

Lösung:
Betrachte eine Regel $AB\gamma \to XY\delta$ mit $\gamma, \delta \in V^\star$ und $1 \leq |\gamma| \leq |\delta|$. Entferne diese Regel und führe die neue Variable $\square$ und folgende Ableitungsregeln ein.

$$AB \to X\square$$
$$\square\gamma \to Y\delta$$

So hat man die Regel $AB\gamma \to XY\delta$ mit $k = |AB\gamma|$ durch Regeln ersetzt, deren linke Seite höchstens Länge $k - 1$ hat.

Durch wiederholtes Anwenden dieser Ersetzung haben die linken Seiten aller Regeln Länge höchstens 2.

(e) Gibt es eine zu G äquivalente Grammatik, bei der $|\alpha| \leq 1$ für alle Regeln vom Typ (3) gilt? Beweisen oder widerlegen Sie!

Lösung:
Damit könnte man bestenfalls die kontextfreien Sprachen erzeugen, welche eine echte Teilmenge der kontextsensitiven Sprachen sind.