Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik
Übung

6. Übungstermin · 12. Dezember 2019

Jonas Sauer

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · LEHRSTUHL ALGORITHMIK

Übersicht

Organisatorisches

- Abgabetermine Übungsblätter
- Punktegrenzen Notenbonus

Inhalt

- Pseudopolynomiale Algorithmen
- Approximationsalgorithmen
- Ganzzahlige Programme

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Abgabetermine Übungsblätter

- Ausgabe 5. Übungsblatt: 17. Dezember
- Ausgabe 6. Übungsblatt: In der Woche vom 7. Januar
- Abgabe 5. Übungsblatt: 14. Januar
- Abgabe 6. Übungsblatt: 21. Januar
- Ausgabe 7. Übungsblatt: 21. Januar
- Abgabe 7. Übungsblatt: 4. Februar

Punktegrenzen Notenbonus

Notenbonus auf bestandene Klausur:

- insgesamt **52 Punkte** oder mehr $\Rightarrow$ **ein** Bonuspunkt
- insgesamt **105 Punkte** oder mehr $\Rightarrow$ **zwei** Bonuspunkte
- insgesamt **157 Punkte** oder mehr $\Rightarrow$ **drei** Bonuspunkte

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Übersicht

Organisatorisches

- Abgabetermine Übungsblätter
- Punktegrenzen Notenbonus

Inhalt

- Pseudopolynomiale Algorithmen
- Approximationsalgorithmen
- Ganzzahlige Programme

Pseudopolynomiale Algorithmen

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Wiederholung

Ein Algorithmus, der Problem Π löst, heißt pseudopolynomial, falls seine Laufzeit durch ein Polynom der beiden Variablen

- Eingabegröße und
- Größe der größten in der Eingabe vorkommenden Zahl

beschränkt ist.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Wiederholung

Ein Algorithmus, der Problem Π löst, heißt pseudopolynomial, falls seine Laufzeit durch ein Polynom der beiden Variablen

- Eingabegröße und
- Größe der größten in der Eingabe vorkommenden Zahl

beschränkt ist.

Äquivalent:

Ein Algorithmus, der Problem Π löst, heißt pseudopolynomial, falls seine Laufzeit polynomial durch die Größe der Eingabe **bei unärer Kodierung** beschränkt ist.

Aufgabe

Problem SUBSETSUM:
Gegeben: Menge $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$, Funktion $w : M \to \mathbb{N}_0$ und $K \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert Teilmenge $M' \subseteq M$ mit

$$\sum_{a \in M'} w(a) = K \,?$$

Aufgabe: Geben Sie einen pseudopolynomialen Algorithmus an.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem SUBSETSUM:
Gegeben: Menge $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$, Funktion $w\colon M \to \mathbb{N}_0$ und $K \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert Teilmenge $M' \subseteq M$ mit

$$\sum_{a \in M'} w(a) = K\,?$$

Aufgabe: Geben Sie einen pseudopolynomialen Algorithmus an.

Idee: Verwende 2-dimensionale Tabelle T der Größe $(n+1) \times (K+1)$, die Wahrheitswerte enthält.

	0	1	2	3	4	5
	w					
x_1			f			
x_2						
x_3						

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem SUBSETSUM:
Gegeben: Menge $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$, Funktion $w : M \to \mathbb{N}_0$ und $K \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert Teilmenge $M' \subseteq M$ mit

$$\sum_{a \in M'} w(a) = K \,?$$

Aufgabe: Geben Sie einen pseudopolynomialen Algorithmus an.

Idee: Verwende 2-dimensionale Tabelle T der Größe $(n+1) \times (K+1)$, die Wahrheitswerte enthält.

Interpretation: $T[i, j] = w \quad \Leftrightarrow$

Es gibt Teilmenge $M' \subseteq \{x_1, \cdots, x_i\}$, sodass

$$\sum_{a \in M'} w(a) = j$$

	0	1	2	3	4	5
	w					
x_1			f			
x_2						
x_3						

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Lösung

Interpretation: $T[i,j] = w \quad \Leftrightarrow$

Es gibt Teilmenge $M' \subseteq \{x_1, \cdots, x_i\}$, sodass

$$\sum_{a \in M'} w(a) = j$$

	0	1	2	3	4	5
	w					
x_1			f			
x_2						
x_3						

Wie $T[i,j]$ aus vorherigen Einträgen bestimmen?

$$T[i,j] = T[i-1,j] \vee T[i-1, j-w(x_i)]$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Lösung

Interpretation: $T[i,j] = w \quad \Leftrightarrow$

Es gibt Teilmenge $M' \subseteq \{x_1, \cdots, x_i\}$, sodass

$$\sum_{a \in M'} w(a) = j$$

	0	1	2	3	4	5
	w					
x_1			f			
x_2						
x_3						

Wie $T[i,j]$ aus vorherigen Einträgen bestimmen?

$$T[i,j] = T[i-1,j] \vee T[i-1, j-w(x_i)]$$

Algorithmus

Initialisiere $T[0,0] =$ **w** und $T[i,j] =$ **f** sonst

Für $i = 0, \ldots n$

Für $j = 0, \ldots K$

$T[i,j] = T[i-1,j] \vee T[i-1, j-w(x_i)]$

Gebe $T[n,K]$ zurück

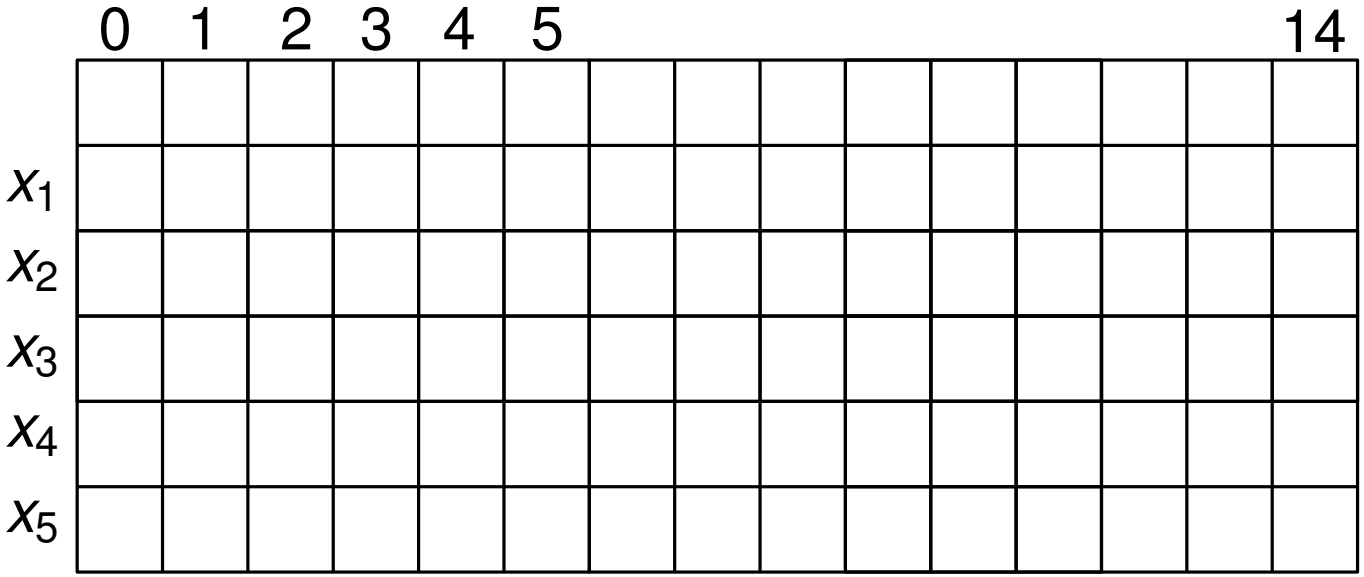
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Beispiel

$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$w(x_1) = 2 \qquad w(x_2) = 3 \quad w(x_3) = 5 \quad w(x_4) = 7 \quad w(x_5) = 10$

$K = 14$



$$T[i,j] = T[i-1,j] \vee T[i-1,j-w(x_i)]$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Beispiel

$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$w(x_1) = 2 \qquad w(x_2) = 3 \quad w(x_3) = 5 \quad w(x_4) = 7 \quad w(x_5) = 10$

$K = 14$

	0	1	2	3	4	5									14
	w	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
x_1															
x_2															
x_3															
x_4															
x_5															

$$T[i,j] = T[i-1,j] \vee T[i-1,j-w(x_i)]$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Beispiel

$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$w(x_1) = 2 \qquad w(x_2) = 3 \quad w(x_3) = 5 \quad w(x_4) = 7 \quad w(x_5) = 10$

$K = 14$

	0	1	2	3	4	5									14
	w	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
x_1	w	f	w	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
x_2															
x_3															
x_4															
x_5															

$$T[i,j] = T[i-1,j] \vee T[i-1,j-w(x_i)]$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Beispiel

$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$w(x_1) = 2 \qquad w(x_2) = 3 \quad w(x_3) = 5 \quad w(x_4) = 7 \quad w(x_5) = 10$

$K = 14$

	0	1	2	3	4	5									14
	w	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
x_1	w	f	w	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
x_2	w	f	w	w	f	w	f	f	f	f	f	f	f	f	f
x_3															
x_4															
x_5															

$$T[i,j] = T[i-1,j] \vee T[i-1,j-w(x_i)]$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Beispiel

$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$w(x_1) = 2 \qquad w(x_2) = 3 \quad w(x_3) = 5 \quad w(x_4) = 7 \quad w(x_5) = 10$

$K = 14$

	0	1	2	3	4	5									14
	w	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
x_1	w	f	w	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
x_2	w	f	w	w	f	w	f	f	f	f	f	f	f	f	f
x_3	w	f	w	w	f	w	f	w	w	f	w	f	f	f	f
x_4															
x_5															

$$T[i, j] = T[i-1, j] \vee T[i-1, j-w(x_i)]$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Beispiel

$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$w(x_1) = 2 \qquad w(x_2) = 3 \quad w(x_3) = 5 \quad w(x_4) = 7 \quad w(x_5) = 10$

$K = 14$

	0	1	2	3	4	5									14
	w	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
x_1	w	f	w	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f
x_2	w	f	w	w	f	w	f	f	f	f	f	f	f	f	f
x_3	w	f	w	w	f	w	f	w	w	f	w	f	f	f	f
x_4	w	f	w	w	f	w	f	w	w	w	w	f	w	f	w
x_5															

$$T[i, j] = T[i-1, j] \vee T[i-1, j-w(x_i)]$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Approximationsalgorithmen

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Wiederholung

Sei Π ein Optimierungsproblem. Ein polynomialer Algorithmus $\mathcal{A}$, der für jedes $I \in D_\Pi$ einen Wert $\mathcal{A}(I)$ liefert, mit

$$\left| \mathrm{OPT}(I) - \mathcal{A}(I) \right| \leq K$$

und $K \in \mathbb{N}_0$ konstant, heißt Approximationsalgorithmus mit absoluter Gütegarantie oder absoluter Approximationsalgorithmus.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem CLIQUE:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Gesucht: Möglichst große Clique von G.
Hinweis: $C \subseteq V$ heißt *Clique*, falls für jedes Paar $u, v \in C$ die Kante $\{u, v\} \in E$ existiert.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem CLIQUE:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Gesucht: Möglichst große Clique von G.
Hinweis: $C \subseteq V$ heißt *Clique*, falls für jedes Paar $u, v \in C$ die Kante $\{u, v\} \in E$ existiert.

Zeige: Es gibt keinen absoluten Approximationsalgorithmus.

- **Annahme:** Sei $\mathcal{A}$ absoluter Approxalgo mit $|OPT(I) - \mathcal{A}(I)| \leq K \quad \forall I$.
- **Idee:** Konstruiere aus $\mathcal{A}$ polynomialen exakten Algo für CLIQUE.
- **Technik:** Baue aus gegebener Instanz I eine größere Instanz I', sodass approximierte Lösung in I' eine optimale Lösung in I induziert.
- **Ziel:** Absoluter Fehler $\leq K$ in $I' \Rightarrow$ absoluter Fehler < 1 in I, also 0.

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ Instanz von CLIQUE.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ Instanz von CLIQUE.

Graph G^m ist für $m \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

1. Kopiere G m-mal.
2. Verbinde jeden Knoten einer Kopie mit jedem Knoten aller anderen Kopien.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ Instanz von CLIQUE.

Graph G^m ist für $m \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

1. Kopiere G m-mal.
2. Verbinde jeden Knoten einer Kopie mit jedem Knoten aller anderen Kopien.

Beob.: $\exists$ Clique C der Größe α in $G \Leftrightarrow \exists$ Clique C^m der Größe αm in G^m

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ Instanz von CLIQUE.

Graph G^m ist für $m \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

1. Kopiere G m-mal.
2. Verbinde jeden Knoten einer Kopie mit jedem Knoten aller anderen Kopien.

Beob.: $\exists$ Clique C der Größe α in $G \Leftrightarrow \exists$ Clique C^m der Größe αm in G^m

Annahme: Es gibt Approximationalg. $\mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}(I) - \text{OPT}(I)| \leq K$ (für alle I)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ Instanz von CLIQUE.

Graph G^m ist für $m \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

1. Kopiere G m-mal.
2. Verbinde jeden Knoten einer Kopie mit jedem Knoten aller anderen Kopien.

Beob.: $\exists$ Clique C der Größe α in $G \Leftrightarrow \exists$ Clique C^m der Größe αm in G^m

Annahme: Es gibt Approximationalg. $\mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}(I) - \text{OPT}(I)| \leq K$ (für alle I)

Strategie, um größte Clique in G zu finden:

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ Instanz von CLIQUE.

Graph G^m ist für $m \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

1. Kopiere G m-mal.
2. Verbinde jeden Knoten einer Kopie mit jedem Knoten aller anderen Kopien.

Beob.: $\exists$ Clique C der Größe α in $G \Leftrightarrow \exists$ Clique C^m der Größe αm in G^m

Annahme: Es gibt Approximationalg. $\mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$ (für alle I)

Strategie, um größte Clique in G zu finden:

1. Erstelle G^{K+1} von G.
2. Wende $\mathcal{A}$ auf G^{K+1} an: Liefert Clique C^{K+1}.
3. Extrahiere aus C^{K+1} eine Clique C für G der Größe $|C| = |C^{K+1}|/(K+1)$.

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ Instanz von CLIQUE.

Graph G^m ist für $m \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

1. Kopiere G m-mal.
2. Verbinde jeden Knoten einer Kopie mit jedem Knoten aller anderen Kopien.

Beob.: $\exists$ Clique C der Größe α in $G \Leftrightarrow \exists$ Clique C^m der Größe αm in G^m

Annahme: Es gibt Approximationalg. $\mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$ (für alle I)

Strategie, um größte Clique in G zu finden:

1. Erstelle G^{K+1} von G.
2. Wende $\mathcal{A}$ auf G^{K+1} an: Liefert Clique C^{K+1}.
3. Extrahiere aus C^{K+1} eine Clique C für G der Größe $|C| = |C^{K+1}|/(K+1)$.

$$|\mathcal{A}(G^{K+1}) - \mathrm{OPT}(G^{K+1})| \leq K \quad \Leftrightarrow \quad |\mathcal{A}(G^{K+1}) - (K+1)\,\mathrm{OPT}(G)| \leq K$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ Instanz von CLIQUE.

Graph G^m ist für $m \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

1. Kopiere G m-mal.
2. Verbinde jeden Knoten einer Kopie mit jedem Knoten aller anderen Kopien.

Beob.: $\exists$ Clique C der Größe α in $G \Leftrightarrow \exists$ Clique C^m der Größe αm in G^m

Annahme: Es gibt Approximationalg. $\mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$ (für alle I)

Strategie, um größte Clique in G zu finden:

1. Erstelle G^{K+1} von G.
2. Wende $\mathcal{A}$ auf G^{K+1} an: Liefert Clique C^{K+1}.
3. Extrahiere aus C^{K+1} eine Clique C für G der Größe $|C| = |C^{K+1}|/(K+1)$.

$$|\mathcal{A}(G^{K+1}) - \mathrm{OPT}(G^{K+1})| \leq K \quad \Leftrightarrow \quad |\mathcal{A}(G^{K+1}) - (K+1)\,\mathrm{OPT}(G)| \leq K$$

$$||C^{K+1}| - (K+1)\,\mathrm{OPT}(G)| \leq K \quad \Leftrightarrow \quad |(K+1)|C| - (K+1)\,\mathrm{OPT}(G)| \leq K$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ Instanz von CLIQUE.

Graph G^m ist für $m \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

1. Kopiere G m-mal.
2. Verbinde jeden Knoten einer Kopie mit jedem Knoten aller anderen Kopien.

Beob.: $\exists$ Clique C der Größe α in $G \Leftrightarrow \exists$ Clique C^m der Größe αm in G^m

Annahme: Es gibt Approximationalg. $\mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$ (für alle I)

Strategie, um größte Clique in G zu finden:

1. Erstelle G^{K+1} von G.
2. Wende $\mathcal{A}$ auf G^{K+1} an: Liefert Clique C^{K+1}.
3. Extrahiere aus C^{K+1} eine Clique C für G der Größe $|C| = |C^{K+1}|/(K+1)$.

$$|\mathcal{A}(G^{K+1}) - \mathrm{OPT}(G^{K+1})| \leq K \quad \Leftrightarrow \quad |\mathcal{A}(G^{K+1}) - (K+1)\,\mathrm{OPT}(G)| \leq K$$

$$||C^{K+1}| - (K+1)\,\mathrm{OPT}(G)| \leq K \quad \Leftrightarrow \quad |(K+1)|C| - (K+1)\,\mathrm{OPT}(G)| \leq K$$

$$\big|\,|C| - \mathrm{OPT}(G)\big| \leq \frac{K}{K+1} < 1$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ Instanz von CLIQUE.

Graph G^m ist für $m \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

1. Kopiere G m-mal.
2. Verbinde jeden Knoten einer Kopie mit jedem Knoten aller anderen Kopien.

Beob.: $\exists$ Clique C der Größe α in $G \Leftrightarrow \exists$ Clique C^m der Größe αm in G^m

Annahme: Es gibt Approximationalg. $\mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}(I) - \mathrm{OPT}(I)| \leq K$ (für alle I)

Strategie, um größte Clique in G zu finden:

1. Erstelle G^{K+1} von G.
2. Wende $\mathcal{A}$ auf G^{K+1} an: Liefert Clique C^{K+1}.
3. Extrahiere aus C^{K+1} eine Clique C für G der Größe $|C| = |C^{K+1}|/(K+1)$.

$$|\mathcal{A}(G^{K+1}) - \mathrm{OPT}(G^{K+1})| \leq K \quad \Leftrightarrow \quad |\mathcal{A}(G^{K+1}) - (K+1)\,\mathrm{OPT}(G)| \leq K$$

$$||C^{K+1}| - (K+1)\,\mathrm{OPT}(G)| \leq K \quad \Leftrightarrow \quad |(K+1)|C| - (K+1)\,\mathrm{OPT}(G)| \leq K$$

$$||C| - \mathrm{OPT}(G)| \leq \frac{K}{K+1} < 1 \quad \longrightarrow \quad |C| = \mathrm{OPT}(G)$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Wiederholung

Sei Π ein Optimierungsproblem. Ein polynomialer Algorithmus $\mathcal{A}$, der für jedes $I \in D_\Pi$ einen Wert $\mathcal{A}(I)$ liefert mit $R_\mathcal{A}(I) \leq K$, wobei $K \geq 1$ eine Konstante, und

$$\mathcal{R}_\mathcal{A}(I) := \begin{cases} \frac{\mathcal{A}(I)}{\mathrm{OPT}(I)} & \text{falls } \Pi \text{ Minimierungsproblem} \\ \frac{\mathrm{OPT}(I)}{\mathcal{A}(I)} & \text{falls } \Pi \text{ Maximierungsproblem} \end{cases}$$

heißt Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

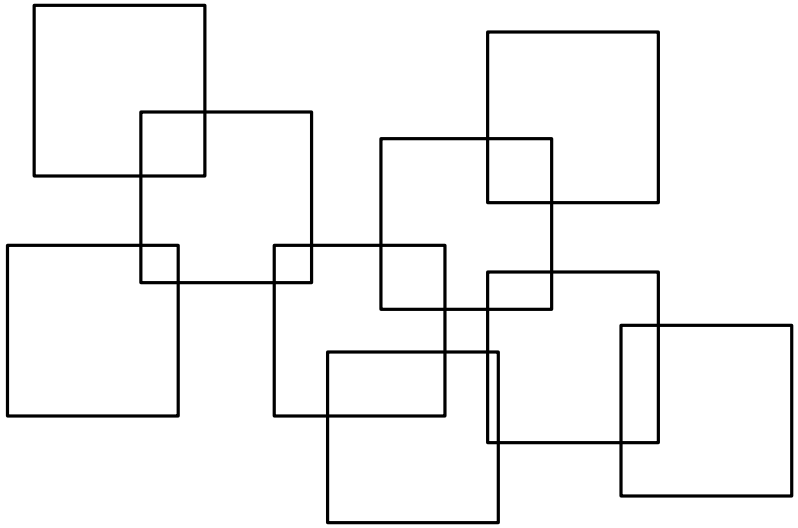
Aufgabe

Problem INDEPENDENTSQUARES:

Gegeben: Menge $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ gleich großer, achsenparalleler Quadrate in der Ebene.

Gesucht: Möglichst große unabhängige Menge $S \subseteq Q$.

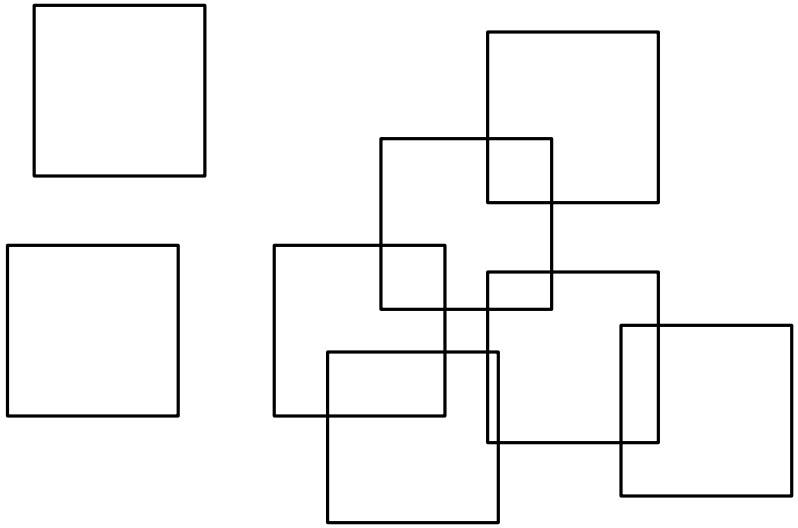
Hinweis: $S \subseteq Q$ heißt *unabhängig*, falls für alle $q_i, q_j \in S$ mit $i \neq j$ gilt, dass q_i und q_j sich nicht schneiden.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

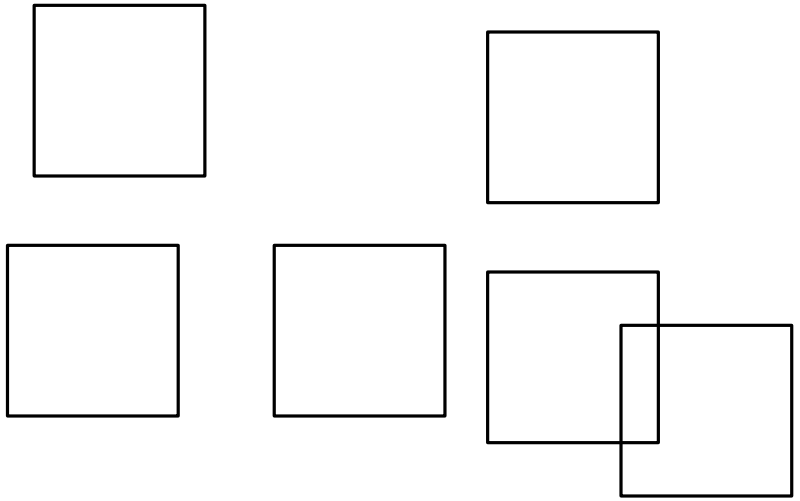
Problem INDEPENDENTSQUARES:
Gegeben: Menge $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ gleich großer, achsenparalleler Quadrate in der Ebene.
Gesucht: Möglichst große unabhängige Menge $S \subseteq Q$.
Hinweis: $S \subseteq Q$ heißt *unabhängig*, falls für alle $q_i, q_j \in S$ mit $i \neq j$ gilt, dass q_i und q_j sich nicht schneiden.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

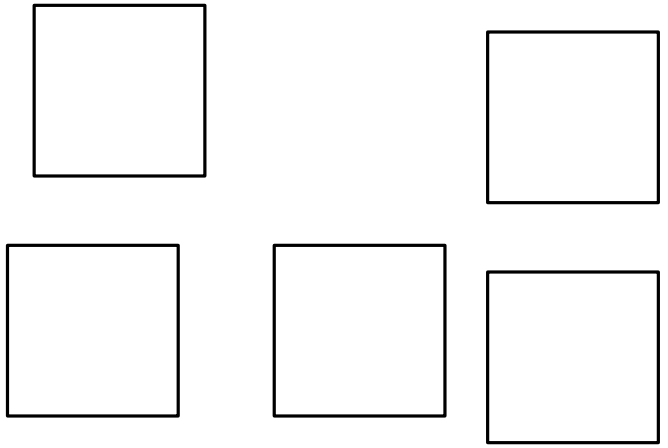
Problem INDEPENDENTSQUARES:
Gegeben: Menge $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ gleich großer, achsenparalleler Quadrate in der Ebene.
Gesucht: Möglichst große unabhängige Menge $S \subseteq Q$.
Hinweis: $S \subseteq Q$ heißt *unabhängig*, falls für alle $q_i, q_j \in S$ mit $i \neq j$ gilt, dass q_i und q_j sich nicht schneiden.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem INDEPENDENTSQUARES:
Gegeben: Menge $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ gleich großer, achsenparalleler Quadrate in der Ebene.
Gesucht: Möglichst große unabhängige Menge $S \subseteq Q$.
Hinweis: $S \subseteq Q$ heißt *unabhängig*, falls für alle $q_i, q_j \in S$ mit $i \neq j$ gilt, dass q_i und q_j sich nicht schneiden.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem INDEPENDENTSQUARES:

Gegeben: Menge $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ gleich großer, achsenparalleler Quadrate in der Ebene.

Gesucht: Möglichst große unabhängige Menge $S \subseteq Q$.

Hinweis: $S \subseteq Q$ heißt *unabhängig*, falls für alle $q_i, q_j \in S$ mit $i \neq j$ gilt, dass q_i und q_j sich nicht schneiden.

Eingabe: $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ gleich großer, achsenparalleler Quadrate mit Mittelpunkten $c_1, \ldots, c_n$, sodass für die x-Koordinaten der Mittelpunkte gilt $x(c_1) \leq \ldots \leq x(c_n)$.

Ausgabe: Unabhängige Menge $S \subseteq Q$.

$S \leftarrow \emptyset$

für $i = 1, \ldots, n$ **tue**

  wenn $q_i \in Q$ **dann**

    $S \leftarrow S \cup \{q_i\}$

    $Q \leftarrow Q \setminus (\{q_i\} \cup \{q_j \in Q \mid q_j \text{ und } q_i \text{ schneiden sich}\})$

return S

Algorithmus 1: SWEEPLINE

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Geben Sie eine Familie von Mengen $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ gleich großer, achsenparalleler Quadrate an, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|Q_n| \in \Theta(n) \text{ und } |\textsc{SweepLine}(Q_n)| = \frac{1}{2}|\operatorname{OPT}(Q_n)|$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{OPT}(Q)$ die kardinalitätsmaximale unabhängige Menge von Q.

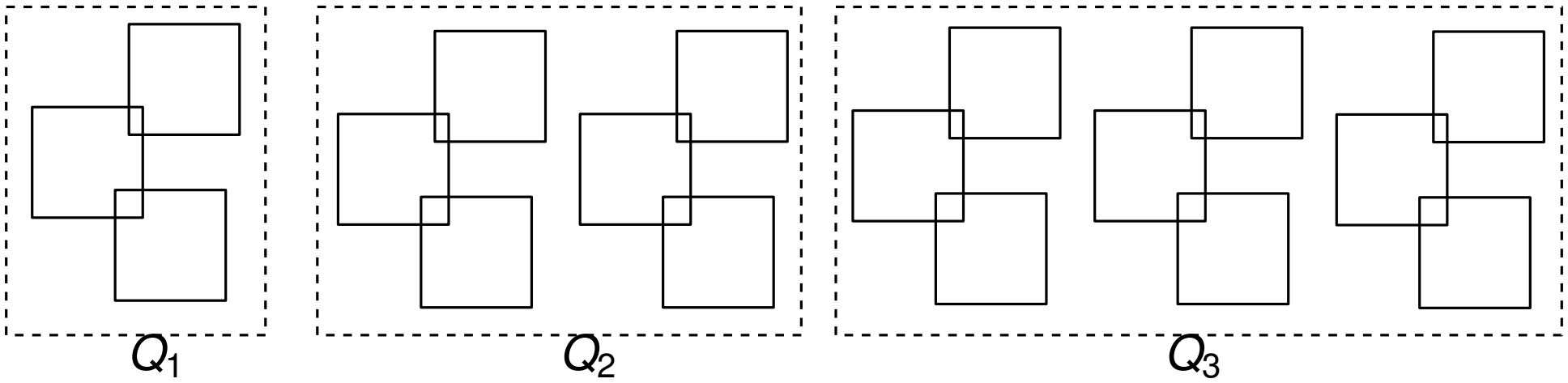
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Geben Sie eine Familie von Mengen $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ gleich großer, achsenparalleler Quadrate an, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|Q_n| \in \Theta(n) \text{ und } |\textsc{SweepLine}(Q_n)| = \frac{1}{2}|\operatorname{OPT}(Q_n)|$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{OPT}(Q)$ die kardinalitätsmaximale unabhängige Menge von Q.



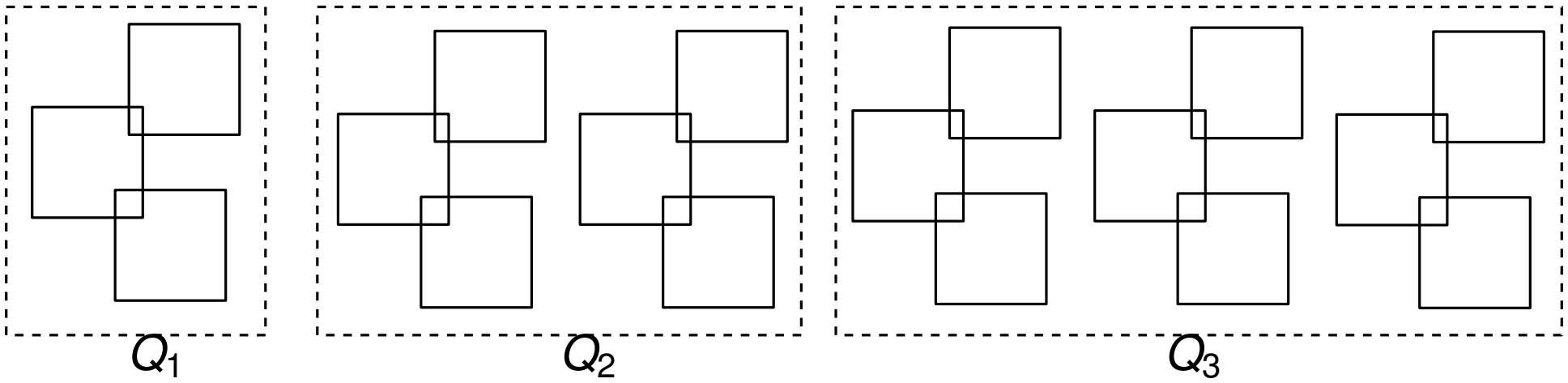
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Geben Sie eine Familie von Mengen $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ gleich großer, achsenparalleler Quadrate an, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|Q_n| \in \Theta(n) \text{ und } |\textsc{SweepLine}(Q_n)| = \frac{1}{2}|\operatorname{OPT}(Q_n)|$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{OPT}(Q)$ die kardinalitätsmaximale unabhängige Menge von Q.



$\rightsquigarrow$ Relative Gütegarantie von SweepLine kann nicht besser als 2 sein.

Aufgabe

Zeigen Sie, dass SWEEPLINE für INDEPENDENTSQUARES ein Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 ist.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Zeigen Sie, dass SWEEPLINE für INDEPENDENTSQUARES ein Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 ist.

Betrachte den Fall, dass q_i im i-ten Schritt in S eingefügt wird.

Bezeichne Q_i die Menge Q direkt vor dem i-ten Schritt.

Sei $K = \{q_j \in Q_i \mid q_j \text{ und } q_i \text{ schneiden sich}\}$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Zeigen Sie, dass SWEEPLINE für INDEPENDENTSQUARES ein Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 ist.

Betrachte den Fall, dass q_i im i-ten Schritt in S eingefügt wird.

Bezeichne Q_i die Menge Q direkt vor dem i-ten Schritt.

Sei $K = \{q_j \in Q_i \mid q_j \text{ und } q_i \text{ schneiden sich}\}$.

Alle Quadrate sind gleich groß und achsenparallel.

→ Jedes Quadrat $q_j \in K$ überdeckt mindestens eine Ecke von q_i.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Zeigen Sie, dass SWEEPLINE für INDEPENDENTSQUARES ein Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 ist.

Betrachte den Fall, dass q_i im i-ten Schritt in S eingefügt wird.

Bezeichne Q_i die Menge Q direkt vor dem i-ten Schritt.

Sei $K = \{q_j \in Q_i \mid q_j \text{ und } q_i \text{ schneiden sich}\}$.

Alle Quadrate sind gleich groß und achsenparallel.

→ Jedes Quadrat $q_j \in K$ überdeckt mindestens eine Ecke von q_i.

$x(c_j) \geq x(c_i)$ für alle $q_j \in Q$:

→ Obere rechte oder untere rechte Ecke von q_i muss überdeckt sein.

→ $|\mathrm{OPT}(K)| \leq 2$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Zeigen Sie, dass SWEEPLINE für INDEPENDENTSQUARES ein Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 ist.

Betrachte den Fall, dass q_i im i-ten Schritt in S eingefügt wird.

Bezeichne Q_i die Menge Q direkt vor dem i-ten Schritt.

Sei $K = \{q_j \in Q_i \mid q_j \text{ und } q_i \text{ schneiden sich}\}$.

Alle Quadrate sind gleich groß und achsenparallel.

→ Jedes Quadrat $q_j \in K$ überdeckt mindestens eine Ecke von q_i.

$x(c_j) \geq x(c_i)$ für alle $q_j \in Q$:

→ Obere rechte oder untere rechte Ecke von q_i muss überdeckt sein.

→ $|\mathrm{OPT}(K)| \leq 2$

Schlimmster Fall: Zwei Quadrate der optimalen Lösung gehen verloren, während eins zur Lösung hinzugenommen wird.

→ Relative Gütegarantie 2

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und sei $G_1 = (V, E_1 \subseteq E)$ ein inklusionsmaximaler azyklischer Teilgraph von G. Zudem sei $G_2 = (V, E_2 = E \setminus E_1)$.

Zeige: Für jede Kante $(u, v) \in E_2$ gibt es in G_1 einen gerichteten Pfad von v nach u.

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und sei $G_1 = (V, E_1 \subseteq E)$ ein inklusionsmaximaler azyklischer Teilgraph von G. Zudem sei $G_2 = (V, E_2 = E \setminus E_1)$.

Zeige: Für jede Kante $(u, v) \in E_2$ gibt es in G_1 einen gerichteten Pfad von v nach u.

Annahme: Es gibt Kante $(u, v) \in E_2$, sodass es keinen gerichteten Pfad von v nach u in G_1 gibt.

⟶ Kante (u, v) kann zu E_1 hinzu genommen werden, ohne dass ein gerichteter Kreis entsteht.

G_1 ist inklusionsmaximaler azyklischer Teilgraph.

Aufgabe

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und sei $G_1 = (V, E_1 \subseteq E)$ ein inklusionsmaximaler azyklischer Teilgraph von G. Zudem sei $G_2 = (V, E_2 = E \setminus E_1)$.

Zeige: G_2 ist azyklisch.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

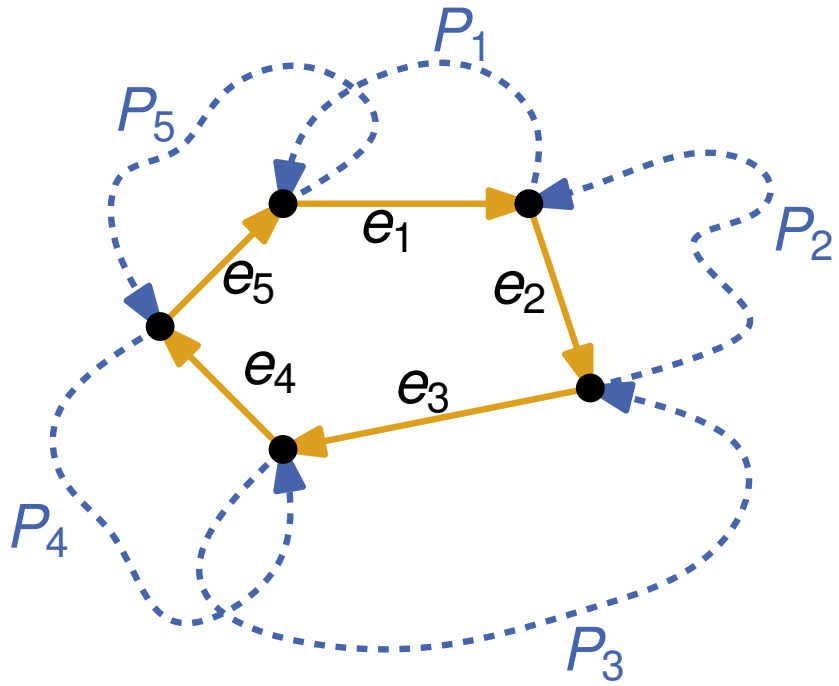
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und sei $G_1 = (V, E_1 \subseteq E)$ ein inklusionsmaximaler azyklischer Teilgraph von G. Zudem sei $G_2 = (V, E_2 = E \setminus E_1)$.

Zeige: G_2 ist azyklisch.

Annahme: G_2 enthält einen Kreis $P = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$.

Vorige Folie: Für jede dieser Kanten $e_i \in P$ gibt es gerichteten Pfad P_i in G_1, der vom Zielknoten von e_i zum Startknoten von e_i führt.

Verbinde Pfade zu einem Kreis.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Maximum Acyclic Graph

Problem MAXIMUM ACYCLIC GRAPH:

Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E)$.
Gesucht: Kardinalitätsmaximaler azyklischer Teilgraph von G.

Gesucht: Approxalgo für MAXIMUM ACYCLIC GRAPH mit relativer Gütegarantie 2.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Maximum Acyclic Graph

Problem MAXIMUM ACYCLIC GRAPH:

Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E)$.
Gesucht: Kardinalitätsmaximaler azyklischer Teilgraph von G.

Gesucht: Approxalgo für MAXIMUM ACYCLIC GRAPH mit relativer Gütegarantie 2.

Berechne inklusionsmaximalen azyklischen Teilgraph $G_1 = (V, E_1)$ von G.
Berechne $G_2 = (V, E \setminus E_1)$.
wenn $|E_1| \geq |E_2|$ **dann**
  return G_1
sonst
  return G_2

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Maximum Acyclic Graph

Problem MAXIMUM ACYCLIC GRAPH:

Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E)$.
Gesucht: Kardinalitätsmaximaler azyklischer Teilgraph von G.

Gesucht: Approxalgo für MAXIMUM ACYCLIC GRAPH mit relativer Gütegarantie 2.

Berechne inklusionsmaximalen azyklischen Teilgraph $G_1 = (V, E_1)$ von G.
Berechne $G_2 = (V, E \setminus E_1)$.
wenn $|E_1| \geq |E_2|$ **dann**
  return G_1
sonst
  return G_2

- G_2 ist azyklisch.
- $|E_1| + |E_2| = |E|$ und $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Maximum Acyclic Graph

Problem MAXIMUM ACYCLIC GRAPH:

Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E)$.
Gesucht: Kardinalitätsmaximaler azyklischer Teilgraph von G.

Gesucht: Approxalgo für MAXIMUM ACYCLIC GRAPH mit relativer Gütegarantie 2.

Berechne inklusionsmaximalen azyklischen Teilgraph $G_1 = (V, E_1)$ von G.
Berechne $G_2 = (V, E \setminus E_1)$.
wenn $|E_1| \geq |E_2|$ **dann**
  return G_1
sonst
  return G_2

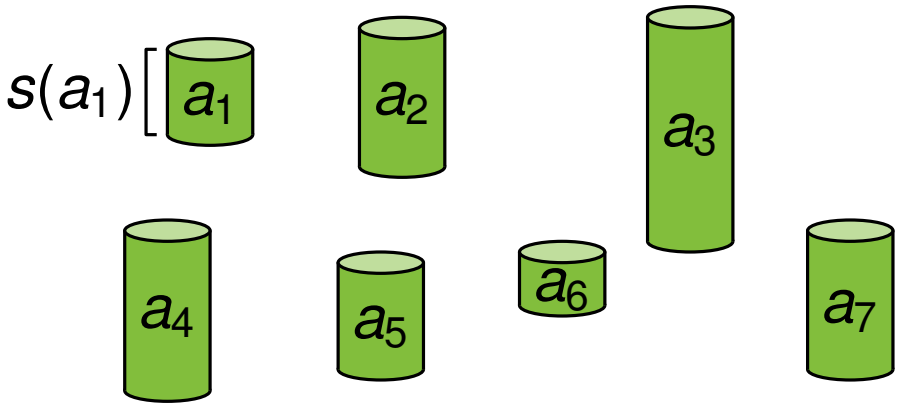
- G_2 ist azyklisch.
- $|E_1| + |E_2| = |E|$ und $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$

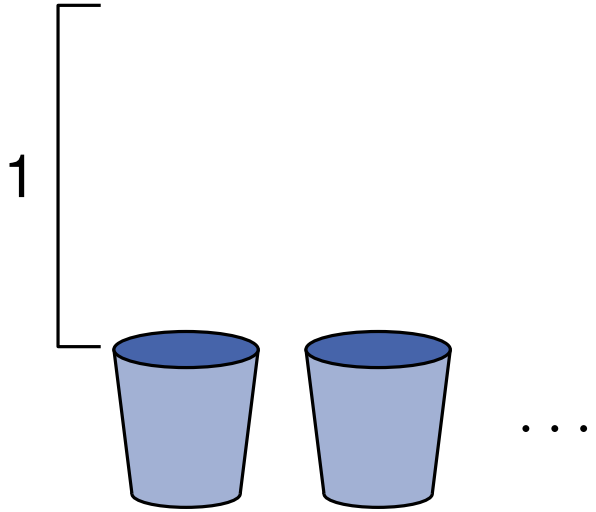
  → $|E_1| \geq \frac{1}{2}|E|$ oder $|E_2| \geq \frac{1}{2}|E|$

  → Optimale Lösung kann nicht mehr als $|E|$ Kanten enthalten.

Bin Packing – Definition

Endliche Menge $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$
mit Gewichtsfunktion
$s\colon M \longrightarrow (0, 1]$





Eimer (Bins) mit Fassungsvermögen 1

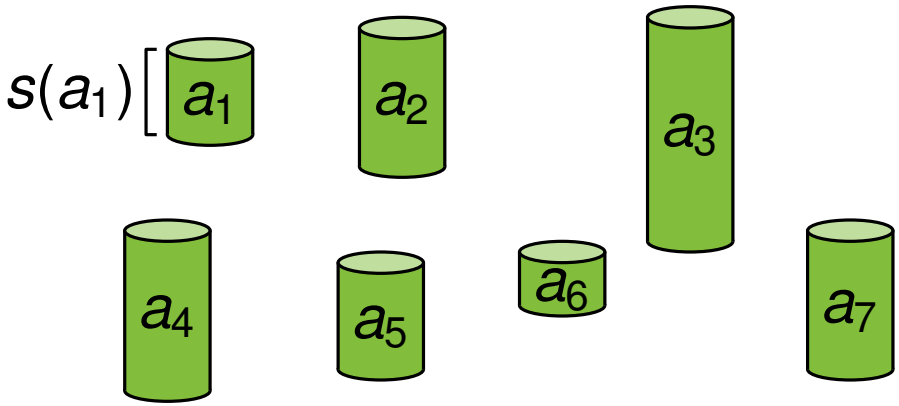
Problem Bin Packing:
Weise die Elemente in M einer minimalen Anzahl an Bins $B_1, \ldots, B_m$ zu, sodass für jeden Bin B gilt:

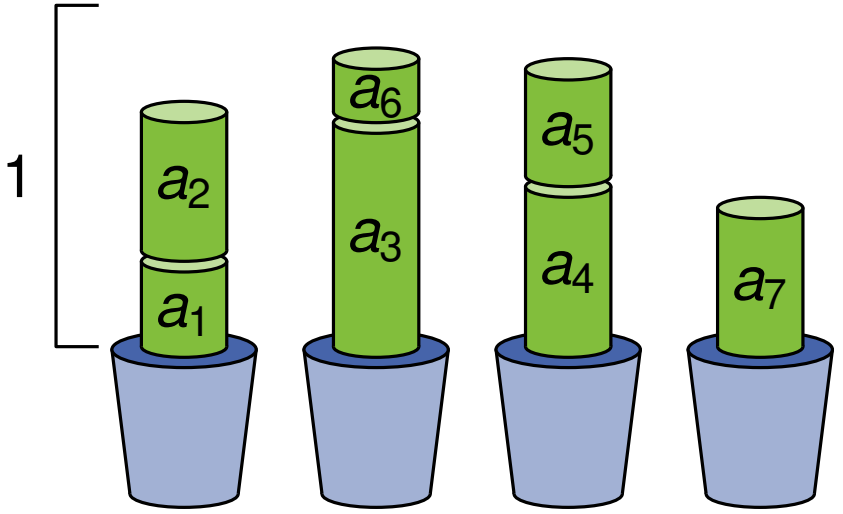
$$\sum_{a_i \in B} s(a_i) \leq 1$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bin Packing – Definition

Endliche Menge $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$
mit Gewichtsfunktion
$s\colon M \longrightarrow (0, 1]$





Eimer (Bins) mit Fassungsvermögen 1

4 Bins

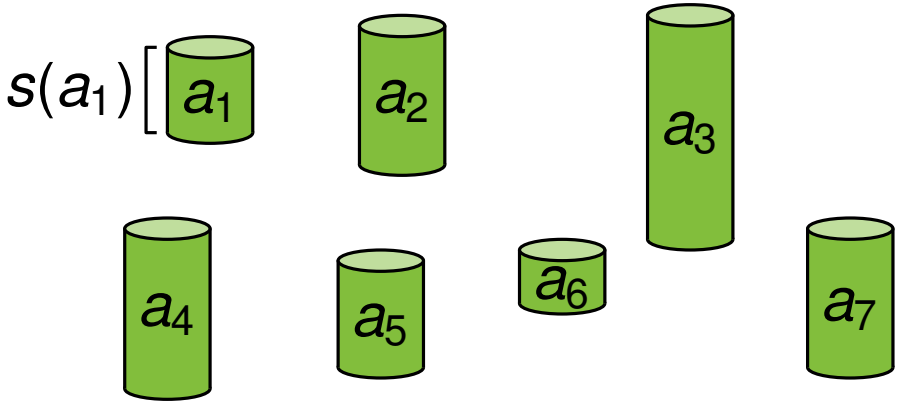
Problem Bin Packing:
Weise die Elemente in M einer minimalen Anzahl an Bins $B_1, \ldots, B_m$ zu, sodass für jeden Bin B gilt:

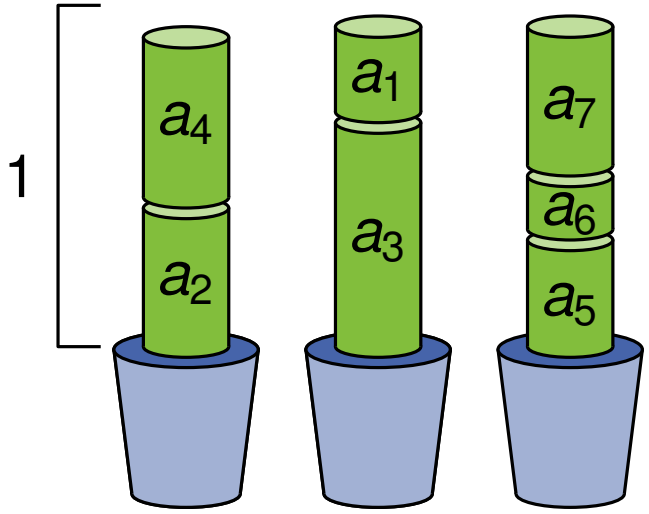
$$\sum_{a_i \in B} s(a_i) \leq 1$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bin Packing – Definition

Endliche Menge $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$
mit Gewichtsfunktion
$s\colon M \longrightarrow (0, 1]$





Eimer (Bins) mit Fassungsvermögen 1

3 Bins

Problem Bin Packing:
Weise die Elemente in M einer minimalen Anzahl an Bins $B_1, \ldots, B_m$ zu, sodass für jeden Bin B gilt:

$$\sum_{a_i \in B} s(a_i) \leq 1$$

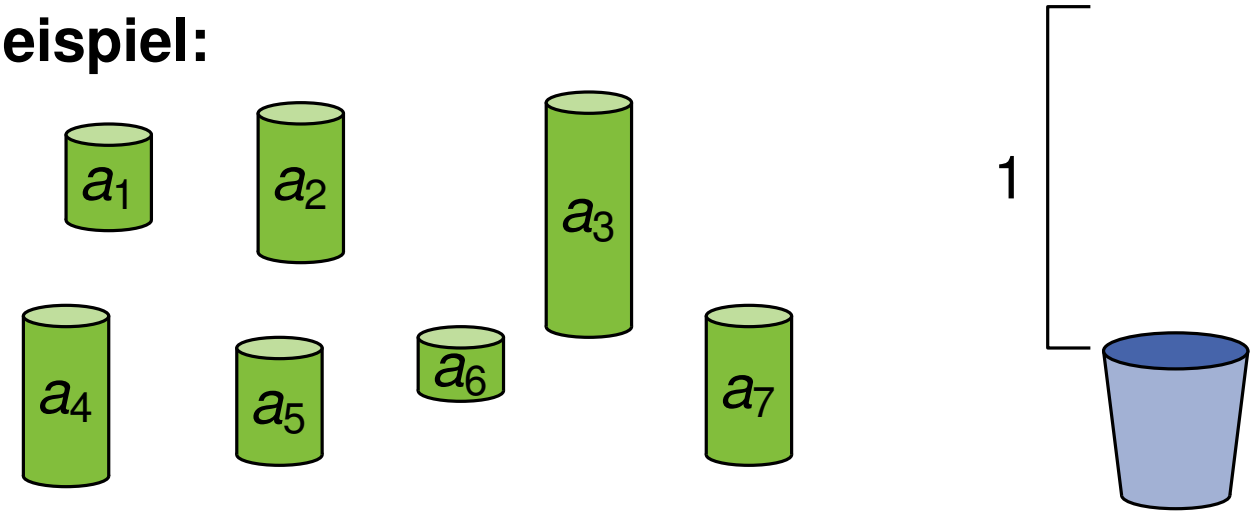
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bin Packing – NextFit

Strategie NextFit:

Füge Elemente nacheinander in den aktuellen Bin ein. Wenn ein Element nicht mehr passt, schließe den Bin ab und nimm einen neuen.

Beispiel:



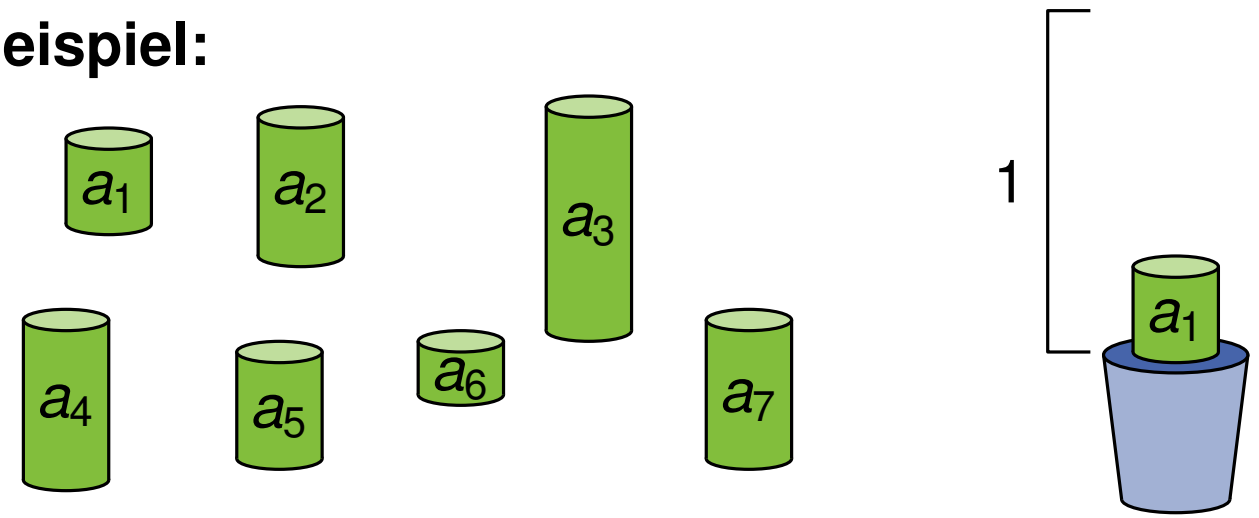
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bin Packing – NextFit

Strategie NextFit:

Füge Elemente nacheinander in den aktuellen Bin ein. Wenn ein Element nicht mehr passt, schließe den Bin ab und nimm einen neuen.

Beispiel:



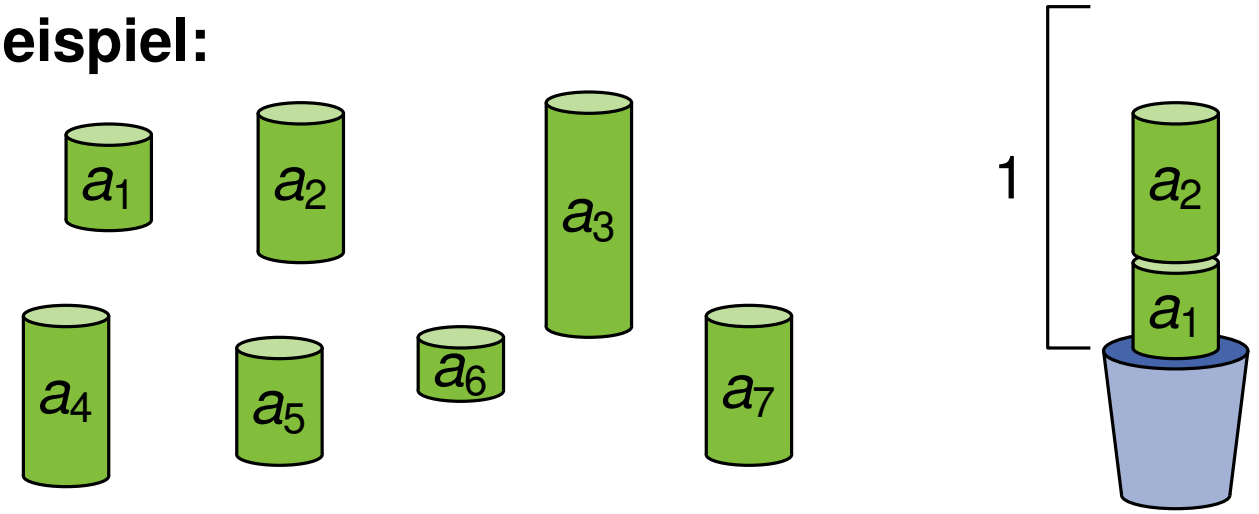
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bin Packing – NextFit

Strategie NextFit:

Füge Elemente nacheinander in den aktuellen Bin ein. Wenn ein Element nicht mehr passt, schließe den Bin ab und nimm einen neuen.

Beispiel:



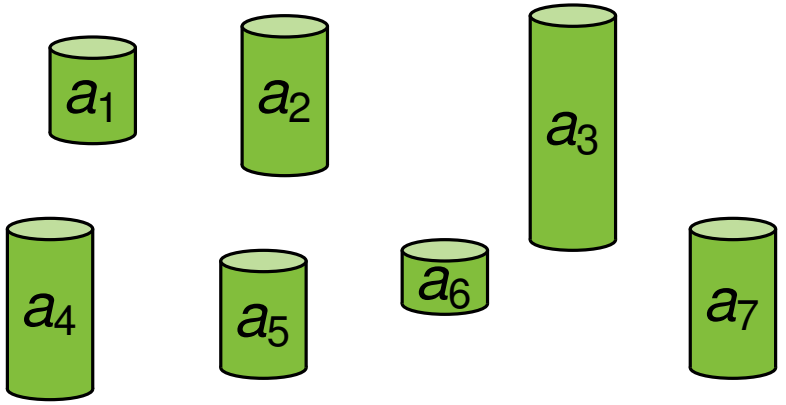
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

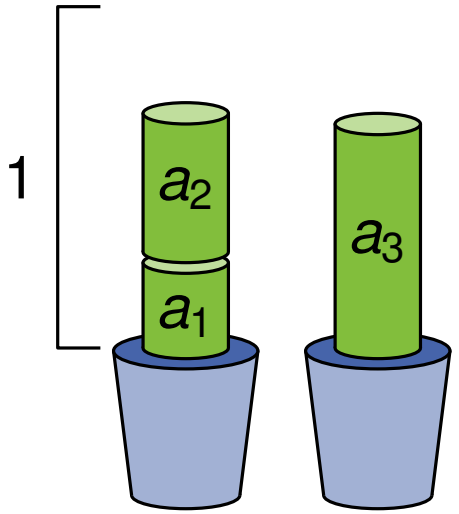
Bin Packing – NextFit

Strategie NextFit:

Füge Elemente nacheinander in den aktuellen Bin ein. Wenn ein Element nicht mehr passt, schließe den Bin ab und nimm einen neuen.

Beispiel:





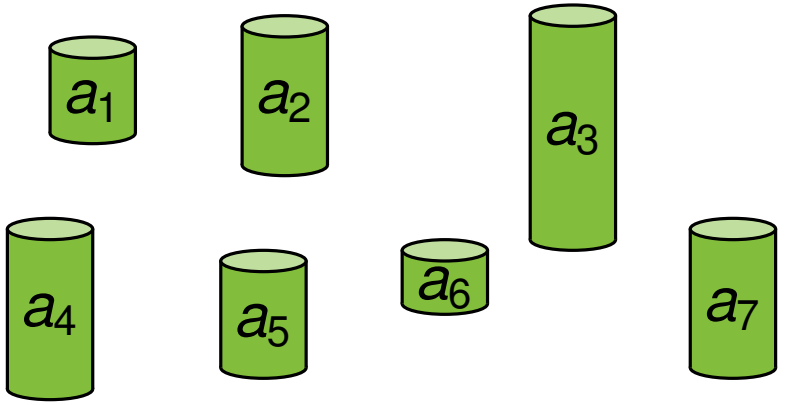
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

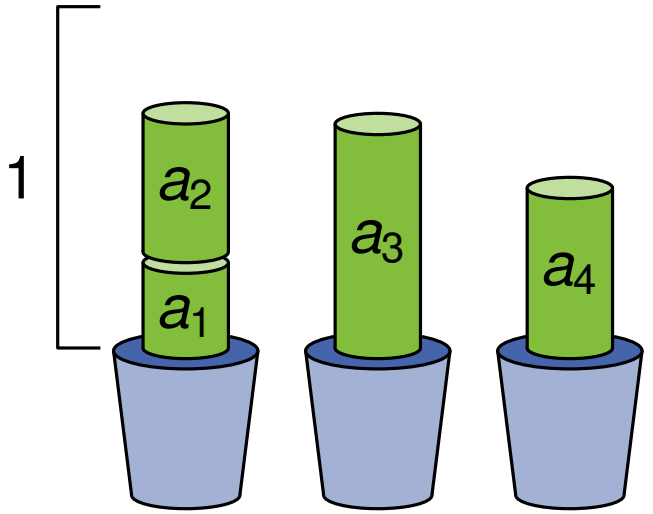
Bin Packing – NextFit

Strategie NextFit:

Füge Elemente nacheinander in den aktuellen Bin ein. Wenn ein Element nicht mehr passt, schließe den Bin ab und nimm einen neuen.

Beispiel:





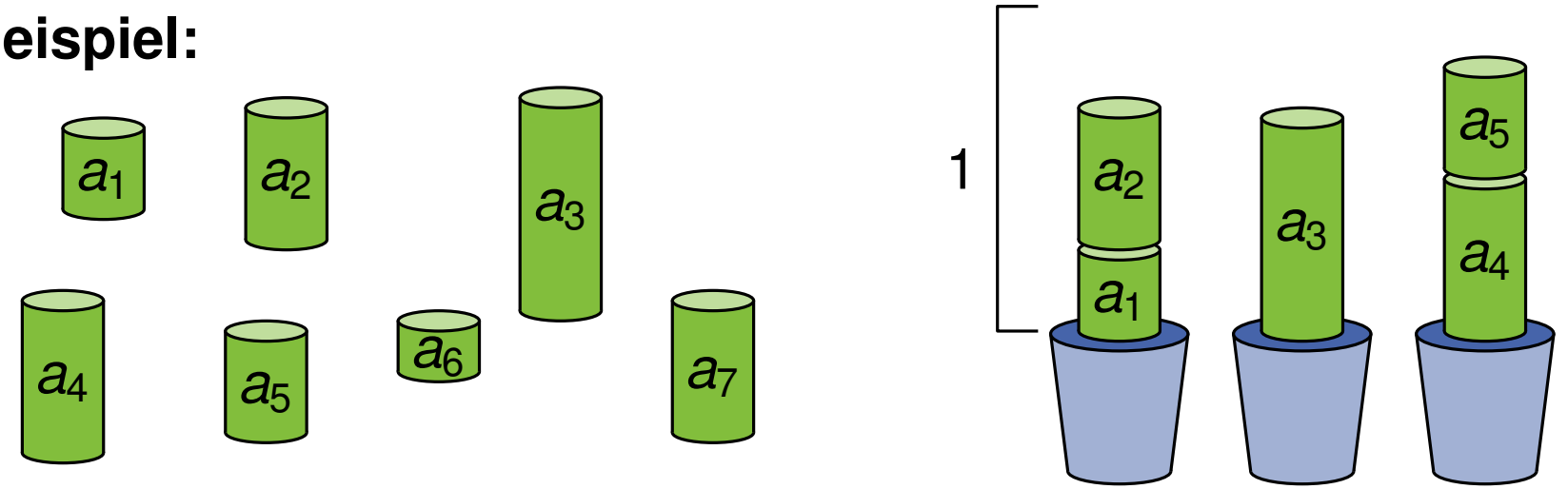
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bin Packing – NextFit

Strategie NextFit:

Füge Elemente nacheinander in den aktuellen Bin ein. Wenn ein Element nicht mehr passt, schließe den Bin ab und nimm einen neuen.

Beispiel:



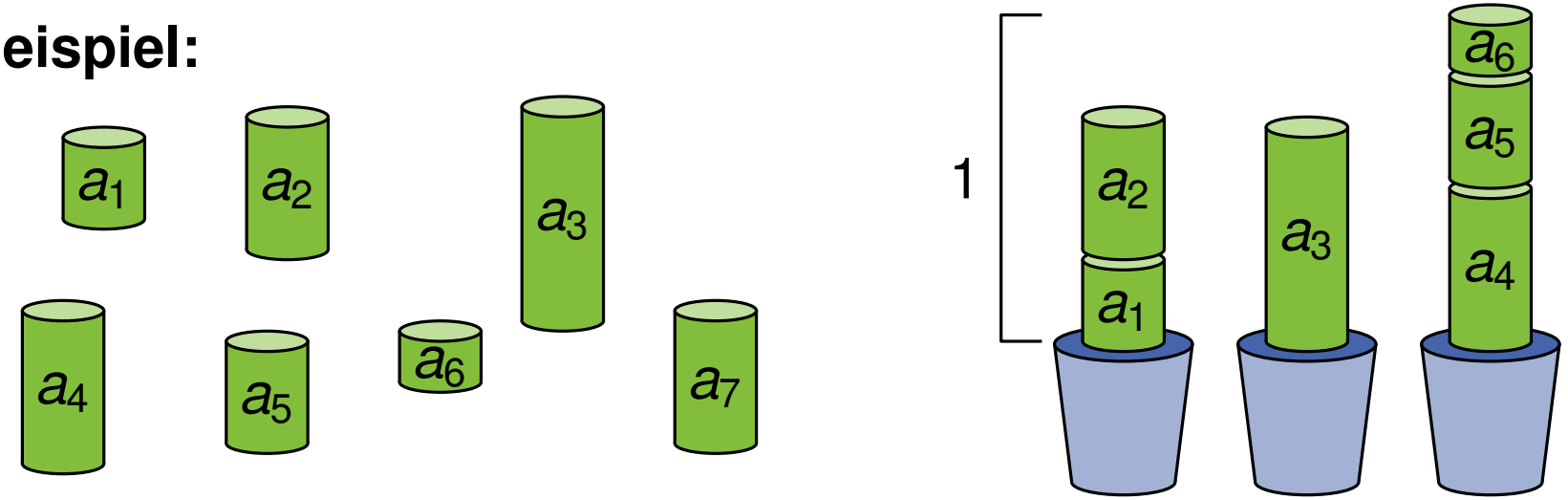
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bin Packing – NextFit

Strategie NextFit:

Füge Elemente nacheinander in den aktuellen Bin ein. Wenn ein Element nicht mehr passt, schließe den Bin ab und nimm einen neuen.

Beispiel:



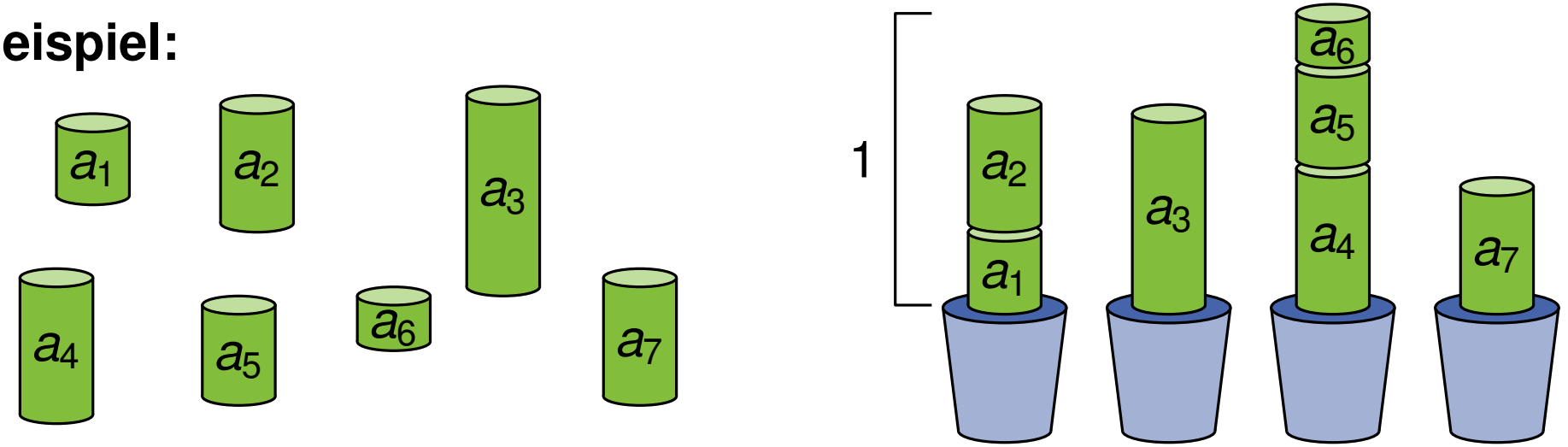
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bin Packing – NextFit

Strategie NextFit:

Füge Elemente nacheinander in den aktuellen Bin ein. Wenn ein Element nicht mehr passt, schließe den Bin ab und nimm einen neuen.

Beispiel:



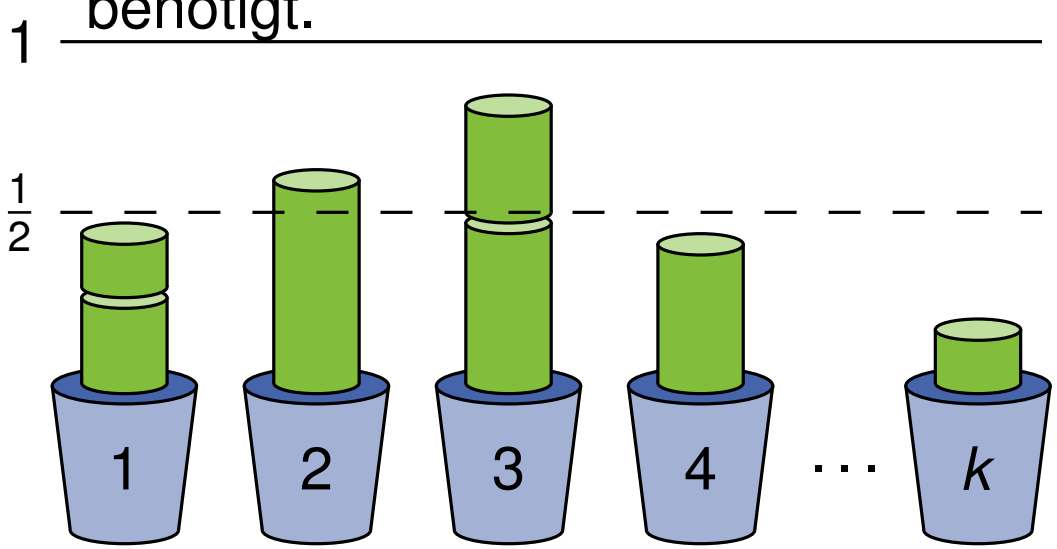
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NextFit – Approximation

Satz: NextFit hat relative Gütegarantie 2.

Beweis:

- Sei k = NF(I) die Anzahl an Bins, die NextFit für die Instanz I benötigt.



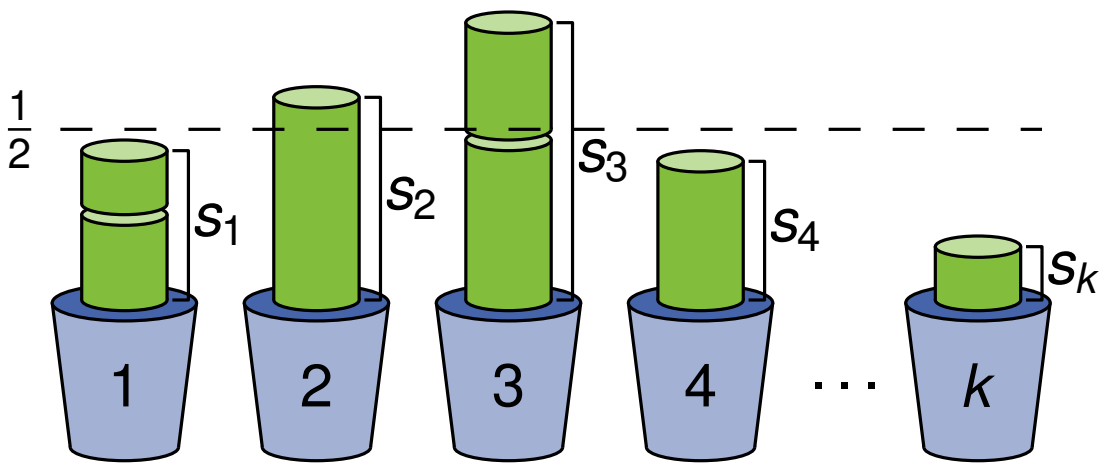
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NextFit – Approximation

Satz: NextFit hat relative Gütegarantie 2.

Beweis:

- Sei $k = \mathrm{NF}(I)$ die Anzahl an Bins, die NextFit für die Instanz I benötigt.
- Sei s_i die Größe der Elemente in Bin i.



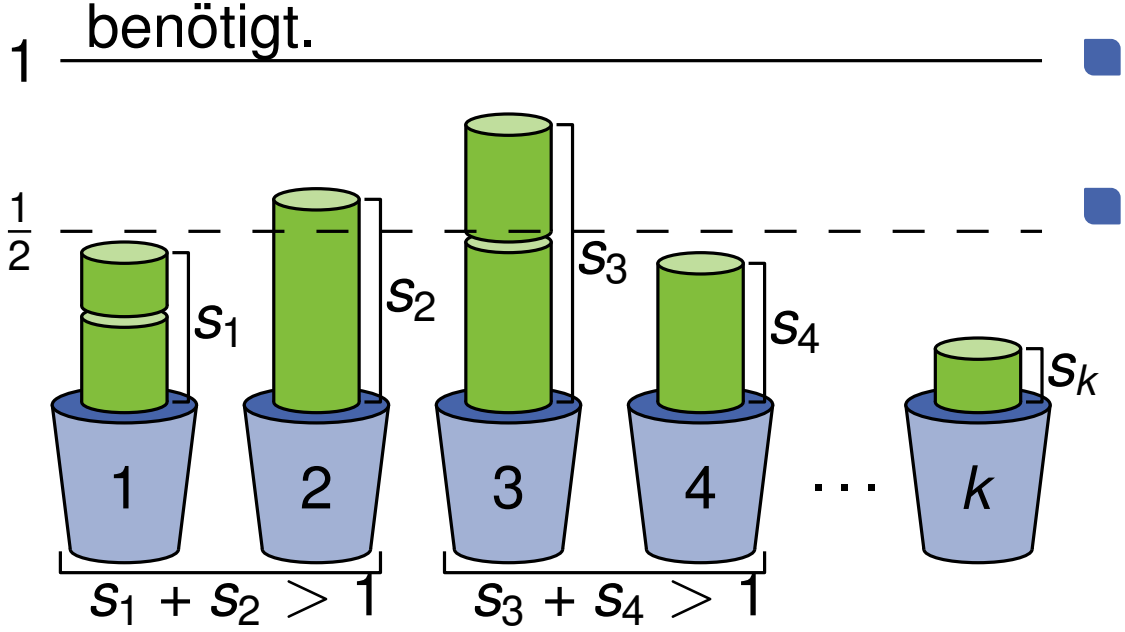
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NextFit – Approximation

Satz: NextFit hat relative Gütegarantie 2.

Beweis:

- Sei $k = \mathrm{NF}(I)$ die Anzahl an Bins, die NextFit für die Instanz I benötigt.



- Sei s_i die Größe der Elemente in Bin i.
- Für zwei aufeinanderfolgende Bins gilt: $s_i + s_{i+1} > 1$

  (sonst hätten die Elemente in Bin $i + 1$ noch in Bin i gepasst)

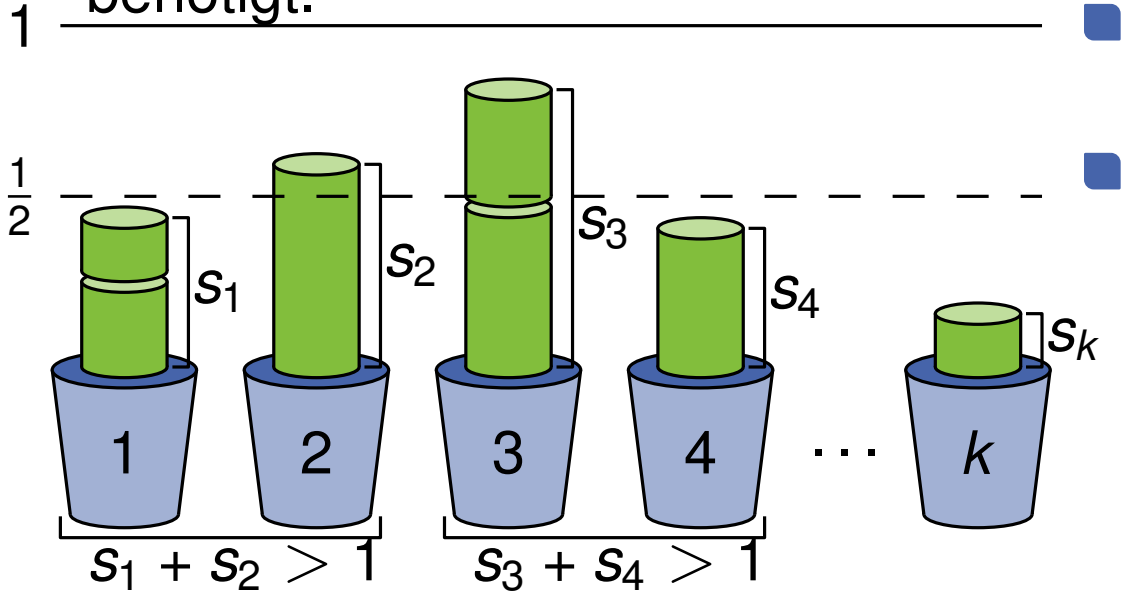
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NextFit – Approximation

Satz: NextFit hat relative Gütegarantie 2.

Beweis:

- Sei $k = \mathrm{NF}(I)$ die Anzahl an Bins, die NextFit für die Instanz I benötigt.



- Sei s_i die Größe der Elemente in Bin i.
- Für zwei aufeinanderfolgende Bins gilt: $s_i + s_{i+1} > 1$
  (sonst hätten die Elemente in Bin $i+1$ noch in Bin i gepasst)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} s_i > \frac{k}{2} \text{ falls } k \text{ gerade bzw. } \sum_{i=1}^{k-1} s_i > \frac{k-1}{2} \text{ falls } k \text{ ungerade}$$

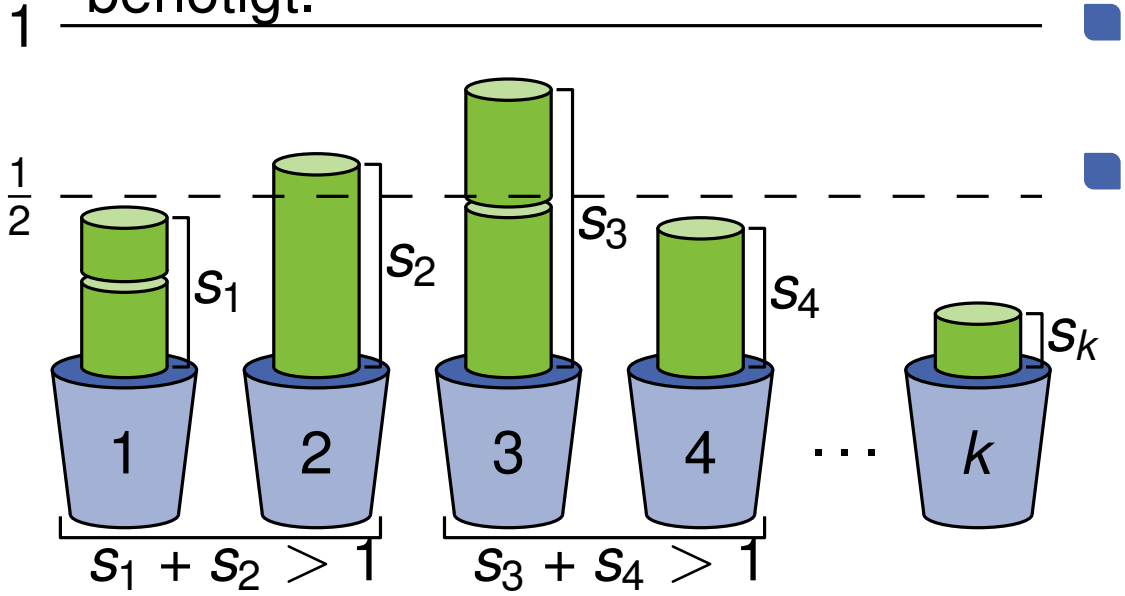
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

NextFit – Approximation

Satz: NextFit hat relative Gütegarantie 2.

Beweis:

- Sei $k = \mathrm{NF}(I)$ die Anzahl an Bins, die NextFit für die Instanz I benötigt.



- Sei s_i die Größe der Elemente in Bin i.
- Für zwei aufeinanderfolgende Bins gilt: $s_i + s_{i+1} > 1$
  (sonst hätten die Elemente in Bin $i+1$ noch in Bin i gepasst)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} s_i > \frac{k}{2} \text{ falls } k \text{ gerade bzw. } \sum_{i=1}^{k-1} s_i > \frac{k-1}{2} \text{ falls } k \text{ ungerade}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Opt}(I) > \frac{k-1}{2} \Rightarrow \mathrm{NF}(I) = k < 2\mathrm{Opt}(I) + 1 \Rightarrow \mathrm{NF}(I) \leq 2\mathrm{Opt}(I)$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

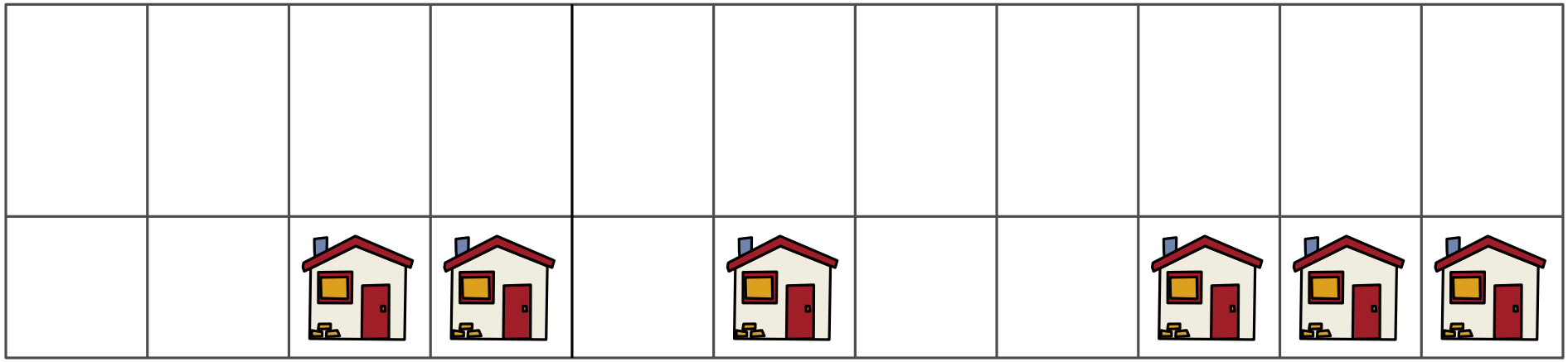
Klausuraufgabe WS16/17

Gegeben:

- Straße aus Zellen $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Häuser in gewissen Zellen
- Sender mit Reichweite k

Gesucht:

Abdeckung aller Häuser mit
möglichst wenig Sendern



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Gegeben:

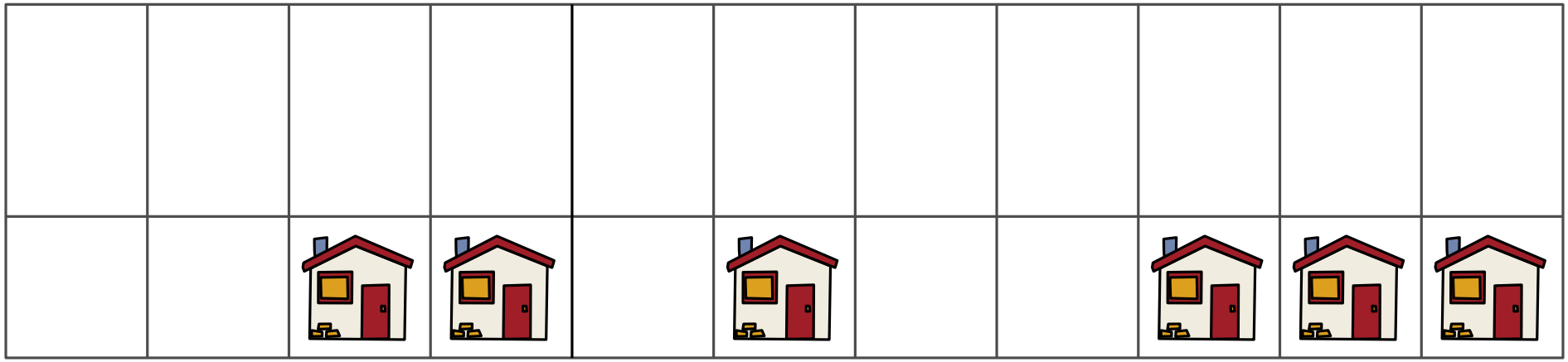
- Straße aus Zellen $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Häuser in gewissen Zellen
- Sender mit Reichweite k

Gesucht:
Abdeckung aller Häuser mit möglichst wenig Sendern

Greedy-Algorithmus $\mathcal{A}$:

Solange nicht jedes Haus abgedeckt ist:

- Wähle nicht abgedecktes Haus mit niedrigster Zelle i.
- Platziere Sender auf Haus in höchster Zelle im Intervall $\{i, i+1, \ldots, i+k\}$.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Gegeben:

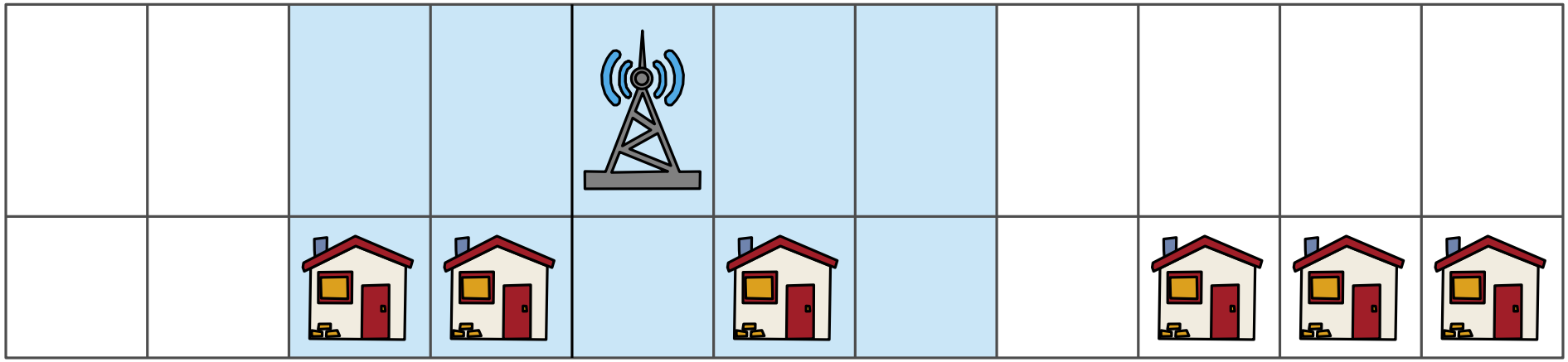
- Straße aus Zellen $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Häuser in gewissen Zellen
- Sender mit Reichweite k

Gesucht:
Abdeckung aller Häuser mit möglichst wenig Sendern

Greedy-Algorithmus $\mathcal{A}$:

Solange nicht jedes Haus abgedeckt ist:

- Wähle nicht abgedecktes Haus mit niedrigster Zelle i.
- Platziere Sender auf Haus in höchster Zelle im Intervall $\{i, i+1, \ldots, i+k\}$.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Gegeben:

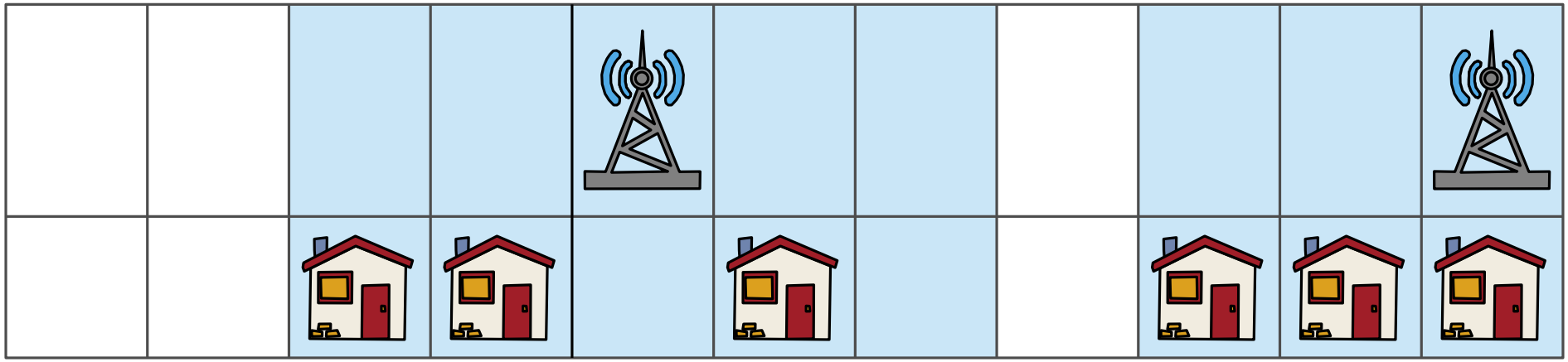
- Straße aus Zellen $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Häuser in gewissen Zellen
- Sender mit Reichweite k

Gesucht:
Abdeckung aller Häuser mit möglichst wenig Sendern

Greedy-Algorithmus $\mathcal{A}$:

Solange nicht jedes Haus abgedeckt ist:

- Wähle nicht abgedecktes Haus mit niedrigster Zelle i.
- Platziere Sender auf Haus in höchster Zelle im Intervall $\{i, i+1, \ldots, i+k\}$.



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Gegeben:

- Straße aus Zellen $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Häuser in gewissen Zellen
- Sender mit Reichweite k

Gesucht:
Abdeckung aller Häuser mit
möglichst wenig Sendern

Greedy-Algorithmus $\mathcal{A}$:

Solange nicht jedes Haus abgedeckt ist:

- Wähle nicht abgedecktes Haus mit niedrigster Zelle i.
- Platziere Sender auf Haus in höchster Zelle im Intervall $\{i, i+1, \ldots, i+k\}$.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ ist optimal

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Gegeben:

- Straße aus Zellen $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Häuser in gewissen Zellen
- Sender mit Reichweite k

Gesucht:
Abdeckung aller Häuser mit möglichst wenig Sendern

Greedy-Algorithmus $\mathcal{A}$:

Solange nicht jedes Haus abgedeckt ist:

- Wähle nicht abgedecktes Haus mit niedrigster Zelle i.
- Platziere Sender auf Haus in höchster Zelle im Intervall $\{i, i+1, \ldots, i+k\}$.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ ist optimal

- Sei $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ $\mathcal{A}$-Lösung.
- Sei $(o_1, o_2, \ldots, o_{t'})$ beliebige, aber feste optimale Lösung.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Gegeben:

- Straße aus Zellen $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Häuser in gewissen Zellen
- Sender mit Reichweite k

Gesucht:
Abdeckung aller Häuser mit möglichst wenig Sendern

Greedy-Algorithmus $\mathcal{A}$:

Solange nicht jedes Haus abgedeckt ist:

- Wähle nicht abgedecktes Haus mit niedrigster Zelle i.
- Platziere Sender auf Haus in höchster Zelle im Intervall $\{i, i+1, \ldots, i+k\}$.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ ist optimal

- Sei $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ $\mathcal{A}$-Lösung.
- Sei $(o_1, o_2, \ldots, o_{t'})$ beliebige, aber feste optimale Lösung.
- Vergleiche a_1, o_1: Es ist $a_1 \geq o_1$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Gegeben:

- Straße aus Zellen $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Häuser in gewissen Zellen
- Sender mit Reichweite k

Gesucht:
Abdeckung aller Häuser mit möglichst wenig Sendern

Greedy-Algorithmus $\mathcal{A}$:

Solange nicht jedes Haus abgedeckt ist:

- Wähle nicht abgedecktes Haus mit niedrigster Zelle i.
- Platziere Sender auf Haus in höchster Zelle im Intervall $\{i, i+1, \ldots, i+k\}$.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ ist optimal

- Sei $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ $\mathcal{A}$-Lösung.
- Sei $(o_1, o_2, \ldots, o_{t'})$ beliebige, aber feste optimale Lösung.
- Vergleiche a_1, o_1: Es ist $a_1 \geq o_1$.
- Dann ist auch $(a_1, o_2, o_3, \ldots, o_{t'})$ eine optimale Lösung.

Klausuraufgabe WS16/17

Gegeben:

- Straße aus Zellen $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Häuser in gewissen Zellen
- Sender mit Reichweite k

Gesucht:
Abdeckung aller Häuser mit möglichst wenig Sendern

Greedy-Algorithmus $\mathcal{A}$:

Solange nicht jedes Haus abgedeckt ist:

- Wähle nicht abgedecktes Haus mit niedrigster Zelle i.
- Platziere Sender auf Haus in höchster Zelle im Intervall $\{i, i+1, \ldots, i+k\}$.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ ist optimal

- Sei $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ $\mathcal{A}$-Lösung.
- Sei $(o_1, o_2, \ldots, o_{t'})$ beliebige, aber feste optimale Lösung.
- Vergleiche a_1, o_1: Es ist $a_1 \geq o_1$.
- Dann ist auch $(a_1, o_2, o_3, \ldots, o_{t'})$ eine optimale Lösung.
- Induktionsschritt:
  $(a_1, a_2, \ldots, a_i, o_{i+1}, o_{i+2}, \ldots, o_{t'})$
  ist optimale Lösung.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Gegeben:

- Straße aus Zellen $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Häuser in gewissen Zellen
- Sender mit Reichweite k

Gesucht:
Abdeckung aller Häuser mit möglichst wenig Sendern

Greedy-Algorithmus $\mathcal{A}$:

Solange nicht jedes Haus abgedeckt ist:

- Wähle nicht abgedecktes Haus mit niedrigster Zelle i.
- Platziere Sender auf Haus in höchster Zelle im Intervall $\{i, i+1, \ldots, i+k\}$.

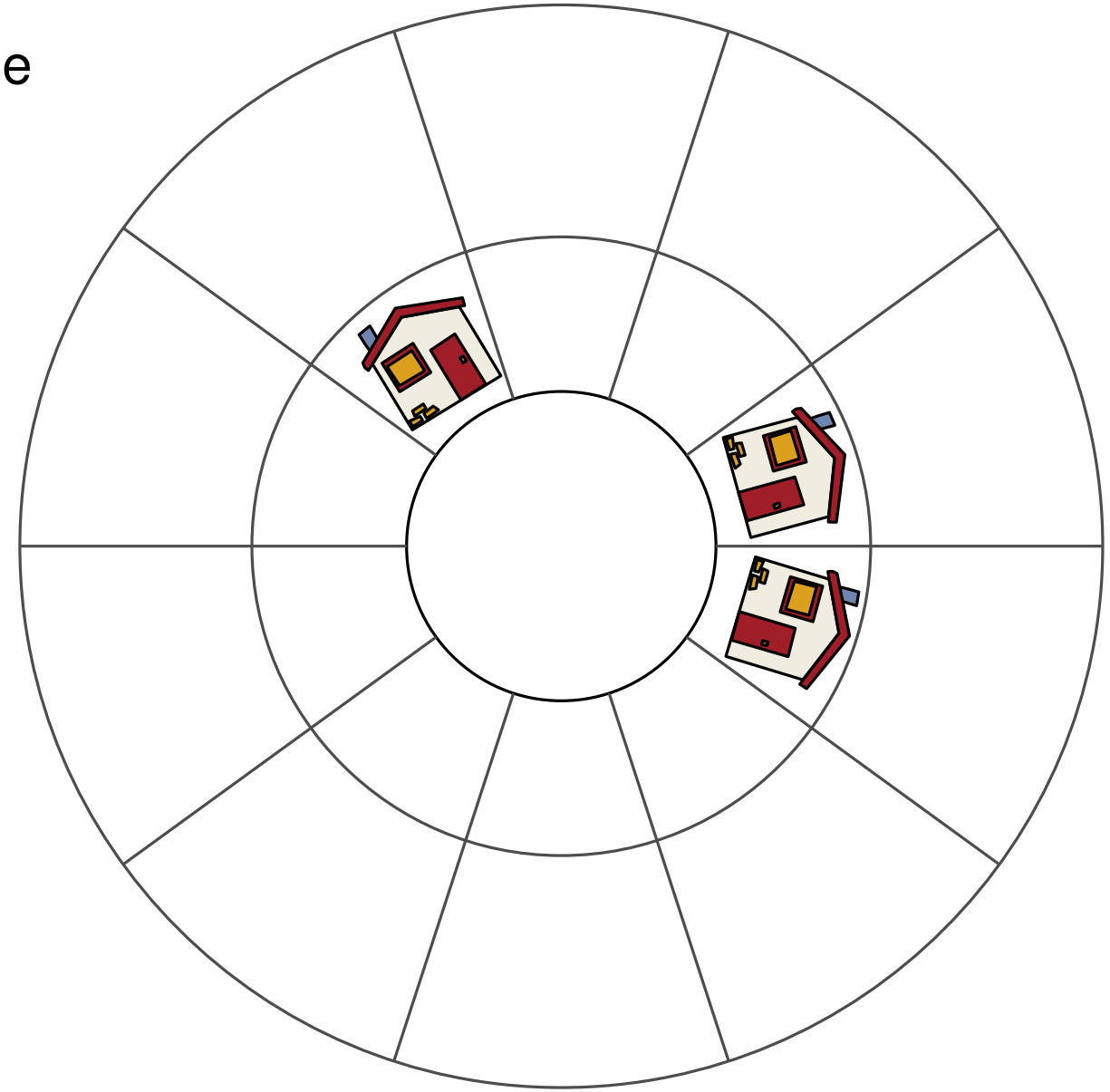
Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ ist optimal

- Sei $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ $\mathcal{A}$-Lösung.
- Sei $(o_1, o_2, \ldots, o_{t'})$ beliebige, aber feste optimale Lösung.
- Vergleiche a_1, o_1: Es ist $a_1 \geq o_1$.
- Dann ist auch $(a_1, o_2, o_3, \ldots, o_{t'})$ eine optimale Lösung.
- Induktionsschritt: $(a_1, a_2, \ldots, a_i, o_{i+1}, o_{i+2}, \ldots, o_{t'})$ ist optimale Lösung.
- Also: $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ ist opt. Lsg.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Jetzt: kreisförmige Straße

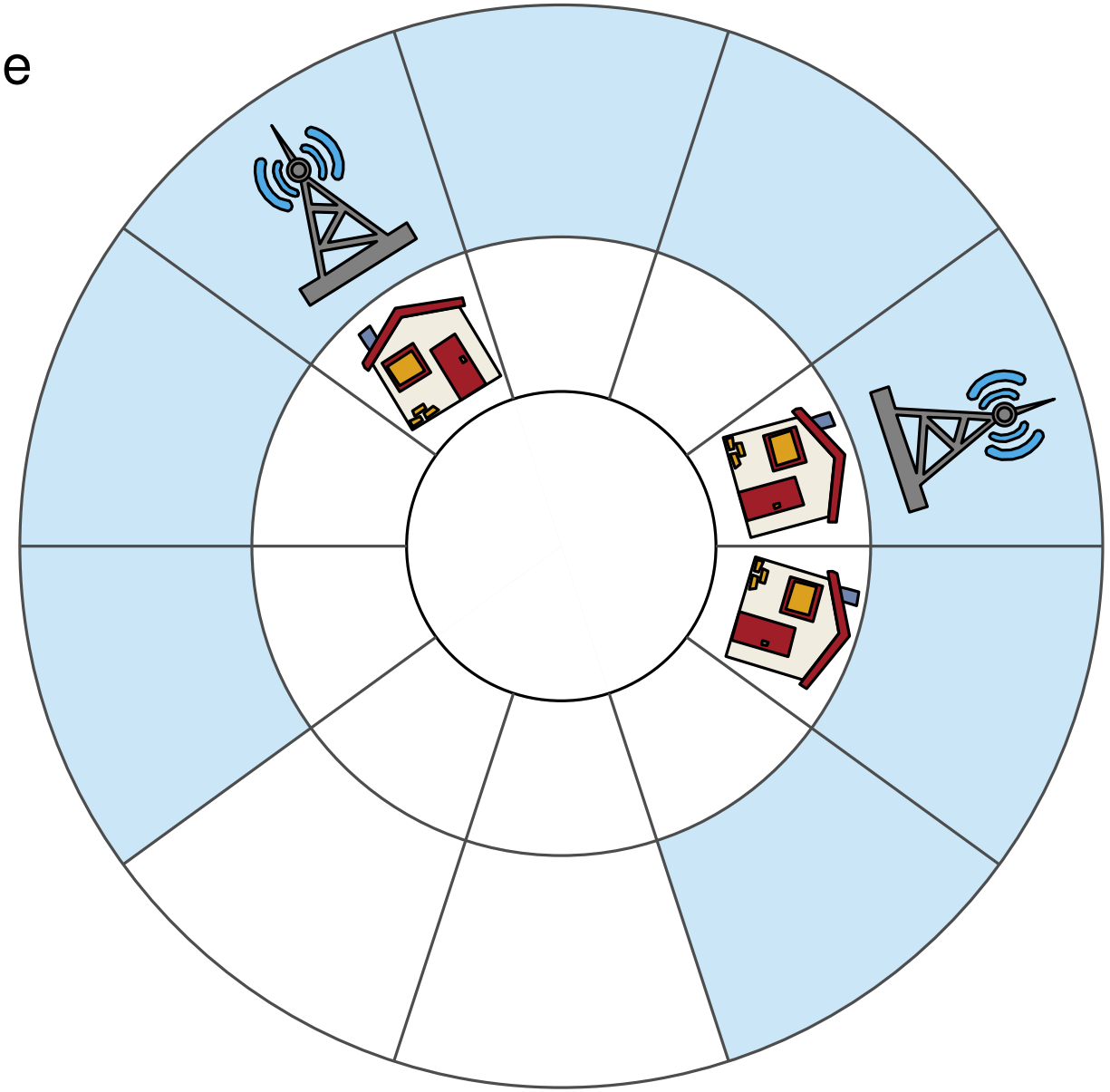


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Jetzt: kreisförmige Straße

Algorithmus $\mathcal{A}'$:
Schneide Straße zwischen zwei beliebigen Zellen auf und wende Algorithmus $\mathcal{A}$ an.

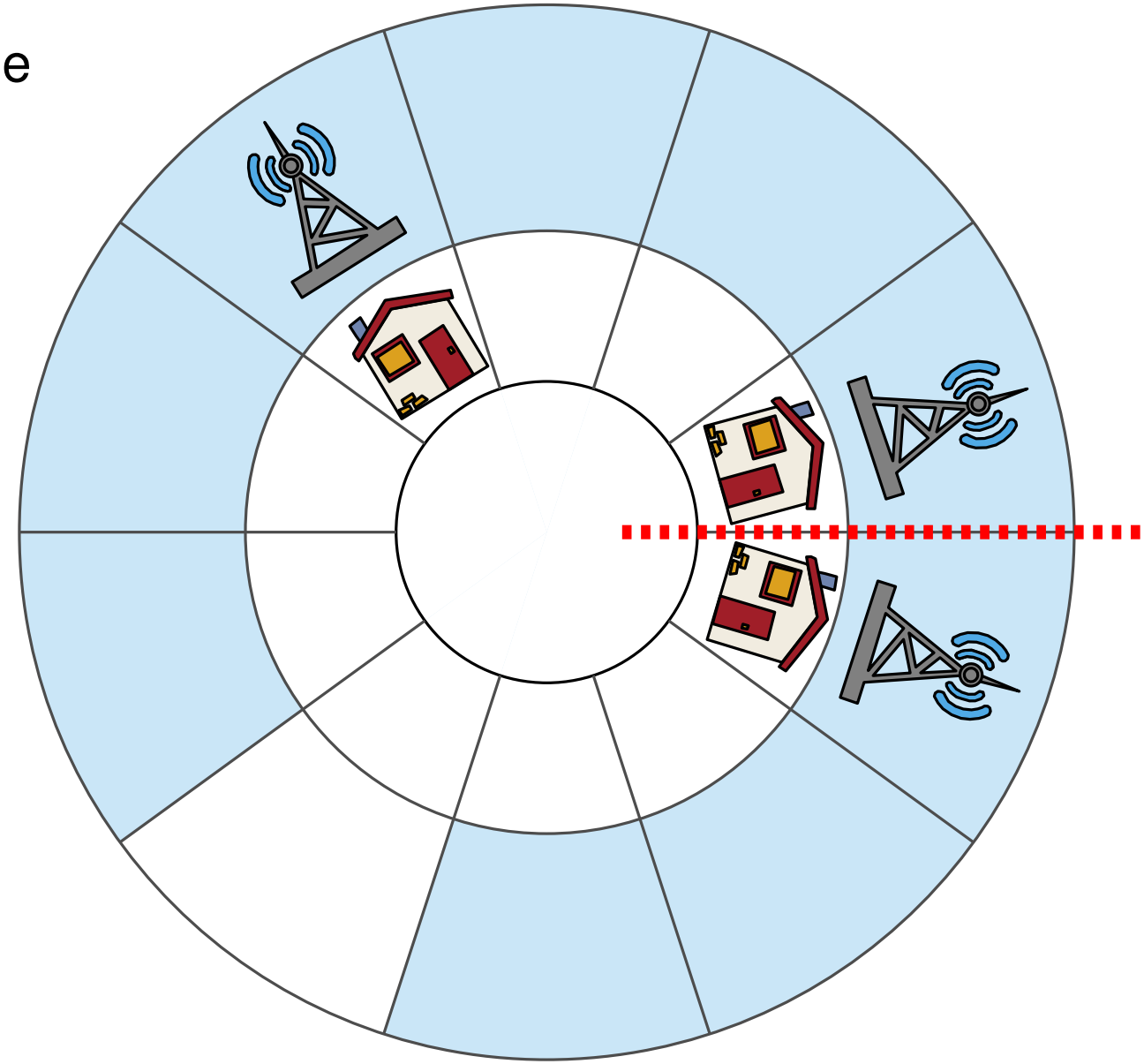


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Jetzt: kreisförmige Straße

Algorithmus $\mathcal{A}'$:
Schneide Straße zwischen zwei beliebigen Zellen auf und wende Algorithmus $\mathcal{A}$ an.

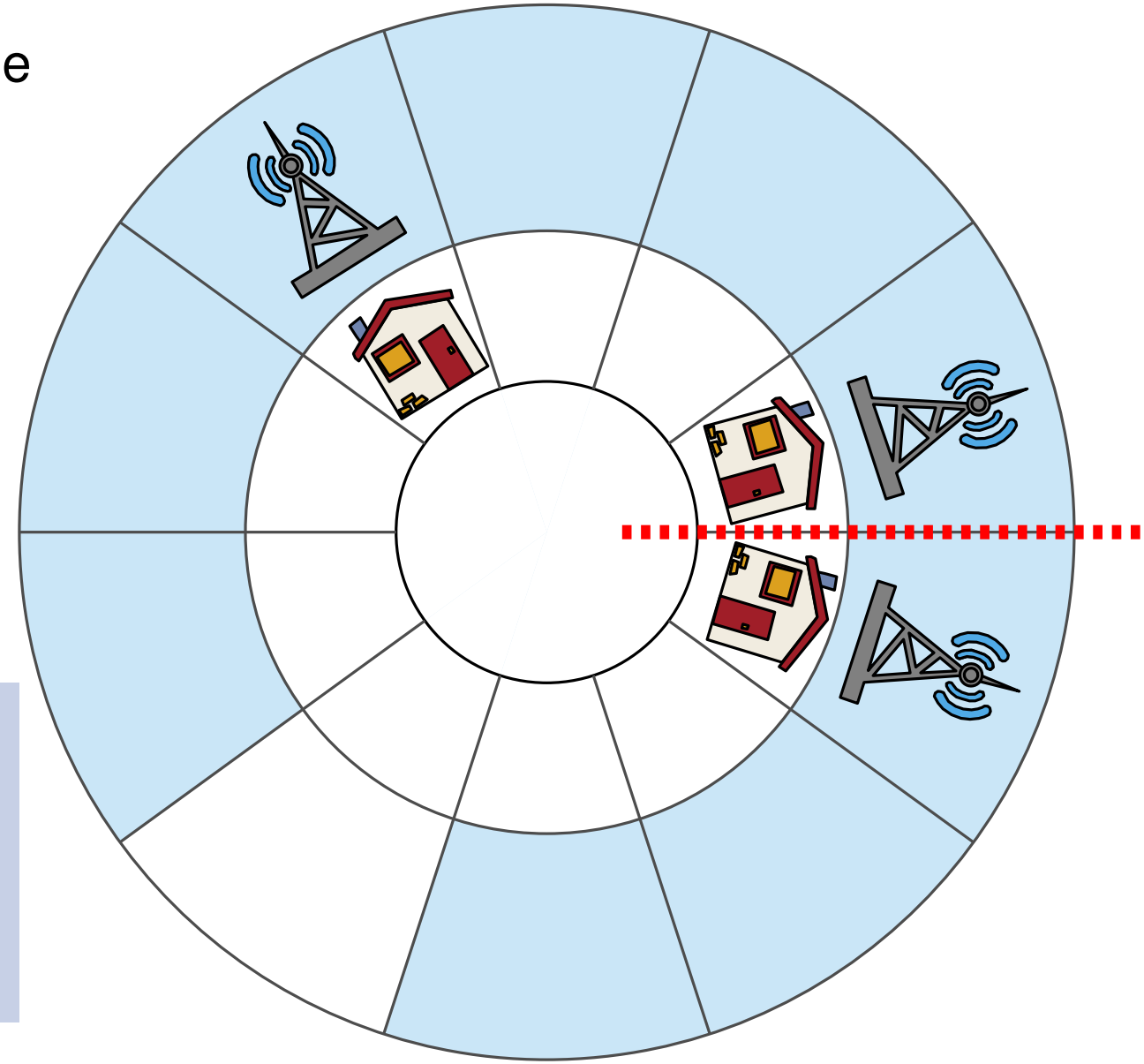


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Jetzt: kreisförmige Straße

Algorithmus $\mathcal{A}'$:
Schneide Straße zwischen zwei beliebigen Zellen auf und wende Algorithmus $\mathcal{A}$ an.



Zeigen Sie: $\mathcal{A}'$ ist ein Approximationsalgorithmus mit konstanter Gütegarantie 1.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Jetzt: kreisförmige Straße

Algorithmus $\mathcal{A}'$:
Schneide Straße zwischen zwei beliebigen Zellen auf und wende Algorithmus $\mathcal{A}$ an.

- Gehe von einer optimalen kreisförmigen Lösung aus.
- Schneide diese auf.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}'$ ist ein Approximationsalgorithmus mit konstanter Gütegarantie 1.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Jetzt: kreisförmige Straße

Algorithmus $\mathcal{A}'$:
Schneide Straße zwischen zwei beliebigen Zellen auf und wende Algorithmus $\mathcal{A}$ an.

- Gehe von einer optimalen kreisförmigen Lösung aus.
- Schneide diese auf.
- Alle Häuser in Zellen $[k+1, k+2, \ldots, n-k]$ sind abgedeckt.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}'$ ist ein Approximationsalgorithmus mit konstanter Gütegarantie 1.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Jetzt: kreisförmige Straße

Algorithmus $\mathcal{A}'$:
Schneide Straße zwischen zwei beliebigen Zellen auf und wende Algorithmus $\mathcal{A}$ an.

- Gehe von einer optimalen kreisförmigen Lösung aus.
- Schneide diese auf.
- Alle Häuser in Zellen $[k+1, k+2, \ldots, n-k]$ sind abgedeckt.
- Nicht abgedeckte Häuser in $[1, 2, \ldots, k]$ können mit einem zusätzlichen Sender abgedeckt werden.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}'$ ist ein Approximationsalgorithmus mit konstanter Gütegarantie 1.

Klausuraufgabe WS16/17

Jetzt: kreisförmige Straße

Algorithmus $\mathcal{A}'$:
Schneide Straße zwischen zwei beliebigen Zellen auf und wende Algorithmus $\mathcal{A}$ an.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}'$ ist ein Approximationsalgorithmus mit konstanter Gütegarantie 1.

- Gehe von einer optimalen kreisförmigen Lösung aus.
- Schneide diese auf.
- Alle Häuser in Zellen $[k+1, k+2, \ldots, n-k]$ sind abgedeckt.
- Nicht abgedeckte Häuser in $[1, 2, \ldots, k]$ können mit einem zusätzlichen Sender abgedeckt werden.
- Analog für $[n-k+1, n-k+2, \ldots, n]$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Jetzt: kreisförmige Straße

Algorithmus $\mathcal{A}'$:
Schneide Straße zwischen zwei beliebigen Zellen auf und wende Algorithmus $\mathcal{A}$ an.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}'$ ist ein Approximationsalgorithmus mit konstanter Gütegarantie 1.

- Gehe von einer optimalen kreisförmigen Lösung aus.
- Schneide diese auf.
- Alle Häuser in Zellen $[k+1, k+2, \ldots, n-k]$ sind abgedeckt.
- Nicht abgedeckte Häuser in $[1, 2, \ldots, k]$ können mit einem zusätzlichen Sender abgedeckt werden.
- Analog für $[n-k+1, n-k+2, \ldots, n]$.
- Es liegen nicht in beiden Randbereichen nicht abgedeckte Häuser, denn diese wären in der ringförmigen Lösung nicht abgedeckt.

Klausuraufgabe WS16/17

Jetzt: kreisförmige Straße

Algorithmus $\mathcal{A}'$:
Schneide Straße zwischen zwei beliebigen Zellen auf und wende Algorithmus $\mathcal{A}$ an.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}'$ ist ein Approximationsalgorithmus mit konstanter Gütegarantie 1.

- Gehe von einer optimalen kreisförmigen Lösung aus.
- Schneide diese auf.
- Alle Häuser in Zellen $[k+1, k+2, \ldots, n-k]$ sind abgedeckt.
- Nicht abgedeckte Häuser in $[1, 2, \ldots, k]$ können mit einem zusätzlichen Sender abgedeckt werden.
- Analog für $[n-k+1, n-k+2, \ldots, n]$.
- Es liegen nicht in beiden Randbereichen nicht abgedeckte Häuser, denn diese wären in der ringförmigen Lösung nicht abgedeckt.
- Ein zusätzlicher Sender reicht für Abdeckung von aufgeschnittener Straße.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Klausuraufgabe WS16/17

Jetzt: kreisförmige Straße

Algorithmus $\mathcal{A}'$:
Schneide Straße zwischen zwei beliebigen Zellen auf und wende Algorithmus $\mathcal{A}$ an.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}'$ ist ein Approximationsalgorithmus mit konstanter Gütegarantie 1.

- Gehe von einer optimalen kreisförmigen Lösung aus.
- Schneide diese auf.
- Alle Häuser in Zellen $[k+1, k+2, \ldots, n-k]$ sind abgedeckt.
- Nicht abgedeckte Häuser in $[1, 2, \ldots, k]$ können mit einem zusätzlichen Sender abgedeckt werden.
- Analog für $[n-k+1, n-k+2, \ldots, n]$.
- Es liegen nicht in beiden Randbereichen nicht abgedeckte Häuser, denn diese wären in der ringförmigen Lösung nicht abgedeckt.
- Ein zusätzlicher Sender reicht für Abdeckung von aufgeschnittener Straße.
- $\mathcal{A}$ optimal $\Rightarrow$ $\mathcal{A}'$ ist konstante 1-Approx.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Ganzzahlige Programmierung

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem GANZZAHLIGEPROGRAMMIERUNG:

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere}_{x} && c^T x && \} \text{ Zielfunktion} \\ &\text{unter} && Ax \leq b, && \} \text{ Einschränkungen} \\ & && x \geq 0, && \} \text{ Schranken} \\ & && x \in \mathbb{Z}, && \end{aligned}$$

c, b sind Vektoren, A ist Matrix.

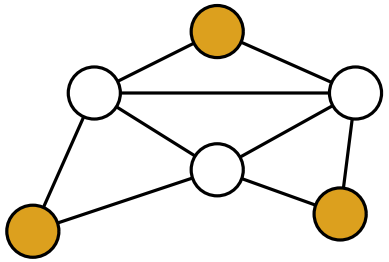
GANZZAHLIGEPROGRAMMIERUNG ist NP-schwer.

Problem UNABHÄNGIGE MENGE:

Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Existiert eine unabhängige Knotenmenge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| \geq k$ gilt?

Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \notin E$.



Aufgabe

Problem UNABHÄNGIGE MENGE:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Gesucht: Möglichst große unabhängige Menge $V' \subseteq V$.
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \notin E$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem UNABHÄNGIGE MENGE:
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Gesucht: Möglichst große unabhängige Menge $V' \subseteq V$.
Hinweis: $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \notin E$.

Variablen: Für jeden Knoten $u \in V$ eine Variable x_u

Idee: $x_u = 1 \iff x_u$ gehört zu gesuchten unabhängigen Menge.

Nebenbedingungen:

Für alle $\{u, v\} \in E$: $x_u + x_v \leq 1$

Für alle $u \in V$: $x_u \in \{0, 1\}$

Zielfunktion: $\sum_{u \in V} x_u$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem MAX2SAT:
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Gesucht: Wahrheitsbelegung, sodass möglichst viele Klauseln erfüllt werden.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem MAX2SAT:
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Gesucht: Wahrheitsbelegung, sodass möglichst viele Klauseln erfüllt werden.

Variablen: Für jede Variable v führe die Variablen x_v und $\overline{x}_v$ ein.

Für jede Klausel c führe die Variable x_c ein.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem MAX2SAT:
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Gesucht: Wahrheitsbelegung, sodass möglichst viele Klauseln erfüllt werden.

Variablen: Für jede Variable v führe die Variablen x_v und $\overline{x}_v$ ein.

Für jede Klausel c führe die Variable x_c ein.

Nebenbedingungen:

Für alle Variablen v: $x_v + \overline{x_v} = 1$ und $x_v \in \{0, 1\}$

Für jede Klausel c: $x_c \in \{0, 1\}$

$x_c \leq x_u + x_v$ falls $c = u \vee v$

Um c zu erfüllen ($x_c = 1$), muss entweder u oder v wahr sein ($x_u = 1$ oder $x_v = 1$, also $x_u + x_v \geq 1$).

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem MAX2SAT:
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Gesucht: Wahrheitsbelegung, sodass möglichst viele Klauseln erfüllt werden.

Variablen: Für jede Variable v führe die Variablen x_v und $\overline{x}_v$ ein.

Für jede Klausel c führe die Variable x_c ein.

Nebenbedingungen:

Für alle Variablen v: $x_v + \overline{x_v} = 1$ und $x_v \in \{0, 1\}$

Für jede Klausel c: $x_c \in \{0, 1\}$

$x_c \leq x_u + x_v$ falls $c = u \vee v$
$x_c \leq \overline{x_u} + x_v$ falls $c = \overline{u} \vee v$
$x_c \leq x_u + \overline{x_v}$ falls $c = u \vee \overline{v}$
$x_c \leq \overline{x_u} + \overline{x_v}$ falls $c = \overline{u} \vee \overline{v}$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Aufgabe

Problem MAX2SAT:
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U, wobei jede Klausel genau **zwei** Literale enthält, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Gesucht: Wahrheitsbelegung, sodass möglichst viele Klauseln erfüllt werden.

Variablen: Für jede Variable v führe die Variablen x_v und $\overline{x}_v$ ein.

Für jede Klausel c führe die Variable x_c ein.

Nebenbedingungen:

Für alle Variablen v: $x_v + \overline{x_v} = 1$ und $x_v \in \{0, 1\}$

Für jede Klausel c: $x_c \in \{0, 1\}$

$$x_c \leq x_u + x_v \quad \text{falls } c = u \vee v$$
$$x_c \leq \overline{x_u} + x_v \quad \text{falls } c = \overline{u} \vee v$$
$$x_c \leq x_u + \overline{x_v} \quad \text{falls } c = u \vee \overline{v}$$
$$x_c \leq \overline{x_u} + \overline{x_v} \quad \text{falls } c = \overline{u} \vee \overline{v}$$

Zielfunktion: $\sum_{\text{Klausel } c} x_c$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik