Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 3

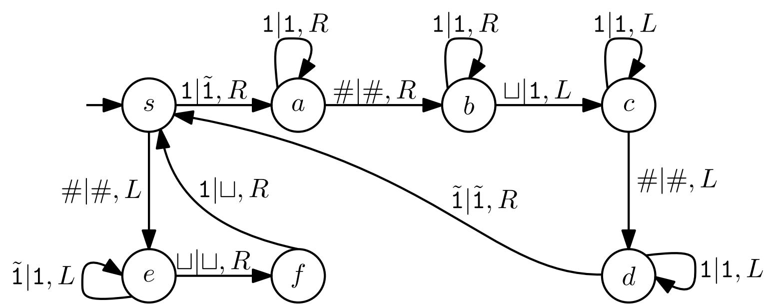
Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 20/21

Ausgabe: 8. Dezember 2020
Abgabe: 22. Dezember 2020, 11:30 Uhr (digital im ILIAS)

Aufgabe 1

(2 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Die Turing-Maschine $\mathcal{M} = (Q, \Sigma = \{\mathtt{1}, \#\}, \Gamma = \{\mathtt{1}, \tilde{\mathtt{1}}, \#, \sqcup\}, \delta, s, \emptyset)$ wird durch den folgenden Zustandsgraphen beschrieben.



(a) Simulieren Sie $\mathcal{M}$ auf der Eingabe $\mathtt{111}\#$, bis Sie zum dritten Mal in den Zustand s gelangen. Geben Sie alle Konfigurationen an, die dabei durchlaufen werden.

(b) Simulieren Sie $\mathcal{M}$ mit der Konfiguration $\tilde{\mathtt{1}}\tilde{\mathtt{1}}\tilde{\mathtt{1}}(s)\#\mathtt{111}$, bis Sie erneut in den Zustand s gelangen.

(c) Was ist die Aufgabe der Zustände $\{s, a, b, c, d\}$ und $\{s, e, f\}$?

(d) Welche Funktion berechnet $\mathcal{M}$?

Aufgabe 2

(1 + 1 + 1 = 3 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Entscheidungsprobleme:

(a) Lassen sich die Zeichen eines Worts w über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$ zu einem Wort w' umsortieren, sodass für alle aufeinanderfolgenden Zeichen x, y in w' gilt, dass $|x - y| = 1$?

(b) BinPacking: Gegeben eine Menge $M \subset \mathbb{Q}$ und ein $k \in \mathbb{N}$, existiert eine Partition $M_1, M_2, \ldots, M_k$ von M mit $\sum_{m \in M_i} m \leq 1$ für $1 \leq i \leq k$?

(c) Coloring: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$, existiert eine Funktion $f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$?

Geben Sie für jedes dieser Probleme eine Ja-Instanz und eine Nein-Instanz an. Beschreiben Sie außerdem, wie eine Orakel-TM arbeitet, die das Problem in polynomieller Zeit löst. Geben Sie dazu insbesondere an:

(i) wie die Instanzen kodiert werden,

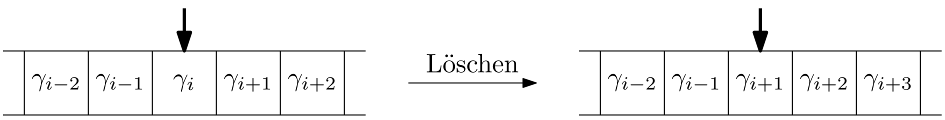
(ii) wie die Orakel-TM den Lösungsvorschlag des Orakelmoduls interpretiert und

(iii) was der deterministische Teil der Orakel-TM tun muss, um den Lösungsvorschlag zu überprüfen.

Aufgabe 3

(1 + 2 + 3 = 6 Punkte)

Eine *löschende Turing-Maschine* (LTM) ist eine deterministische Turing-Maschine, der zusätzlich zu den Kopfbewegungen *links*, *keine Bewegung* und *rechts* die Aktion *löschen* zur Verfügung steht. Beim Löschen wird das Feld, auf dem der Kopf der Turing-Maschine steht, aus dem Band gelöscht und der Kopf bewegt sich auf das Feld, das zuvor der rechte Nachbar des nun gelöschten Feldes war:



Sei $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$.

(a) Welche Laufzeit braucht eine deterministische Turing-Maschine mit einem Band, um L zu entscheiden? Wählen Sie aus den folgenden Möglichkeiten die schärfste untere Schranke für die Worst-Case-Laufzeit aus.

- ☐ $\Omega(\log n)$
- ☐ $\Omega(n)$
- ☐ $\Omega(n^2)$
- ☐ $\Omega(2^n)$

Begründen Sie Ihre Entscheidung kurz (ohne formalen Beweis).

(b) Beschreiben Sie, wie man L mit einer LTM in Linearzeit entscheiden kann. Belegen Sie die Laufzeit.

(c) Sind Turing-Maschinen und löschende Turing-Maschinen gleich mächtig? Beweisen Sie.

Aufgabe 4

(1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Das Komplement des Halteproblems ist semi-entscheidbar.

(b) Das Komplement der Diagonalsprache ist semi-entscheidbar.

(c) Seien L_1 und L_2 semi-entscheidbare Sprachen. Dann ist auch $L_1 \cup L_2$ semi-entscheidbar.

(d) Seien L_1 und L_2 semi-entscheidbare Sprachen. Dann ist auch $L_1 \setminus L_2$ semi-entscheidbar.

Aufgabe 5 (2 + 3 = 5 Punkte)

Eine Turing-Maschine M zählt eine unendliche Sprache L auf, wenn M niemals stoppt und eine Liste $w_1, w_2, \ldots$ genau der Wörter aus L ausgibt. Dabei ignoriert M die Eingabe und die Wörter der ausgegebenen Liste sind eindeutig voneinander getrennt. Für die Reihenfolge der Wörter in der Liste muss gelten, dass jedes Wort aus L nach endlich vielen Schritten ausgegeben wird. Eine unendliche Sprache L ist aufzählbar, falls eine Turing-Maschine existiert, die L aufzählt.

(a) Zeigen Sie, dass L genau dann entscheidbar ist, wenn L in kanonischer Reihenfolge[1] aufzählbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass L genau dann semi-entscheidbar ist, wenn L aufzählbar ist. Erklären Sie auch, warum sich hier im Gegensatz zu Aufgabenteil (a) nicht fordern lässt, dass die Reihenfolge der Aufzählung kanonisch ist.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$ unentscheidbar ist.

Aufgabe 7 (1 + 2 + 1 = 4 Punkte)

In der Übung wurde das Äquivalenzproblem für Turing-Maschinen vorgestellt:

$$L_{\text{äq}} = \{w\#v \in \{0, 1, \#\}^* \mid L(T_w) = L(T_v)\}$$

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass weder $L_{\text{äq}}$ noch $L_{\text{äq}}^c$ semi-entscheidbar ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass das Komplement der universellen Sprache L_u^c nicht semi-entscheidbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $L_{\text{äq}}$ nicht semi-entscheidbar ist. Nehmen Sie dazu an, es gäbe eine Turing-Maschine $M_{\text{äq}}$, die $L_{\text{äq}}$ akzeptiert. Konstruieren Sie daraus eine Turing-Maschine M_u^c, die L_u^c akzeptiert.

(c) Zeigen Sie mit der gleichen Herangehensweise wie in Aufgabenteil (b), dass $L_{\text{äq}}^c$ nicht semi-entscheidbar ist.

[1] Siehe Vorlesung 6, Folie 20. Die kanonische Reihenfolge sortiert Wörter nach aufsteigender Länge und Wörter der gleichen Länge lexikographisch.