Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 13.01.2022

Torsten Ueckerdt | 13. Januar 2022

Übersicht

Chomsky-Hierarchie	**Wortproblem** letzte Vorlesung	**Beispiele** heute
Chomsky-0	semi-entscheidbar NTM akzeptiert	
Chomsky-1 kontextsensitiv	$\mathcal{NP}$-schwer $\mathcal{NTAPE}(n)$	
Chomsky-2 kontextfrei	polynomiell CYK-Algorithmus	
Chomsky-3 regulär	linear DEA	

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen.

Sei L eine reguläre Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung

$$w = uvx \text{ mit } |uv| \leq n\,,\ v \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^ix \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ eine Darstellung

$$z = uvwxy \text{ mit } |vwx| \leq n\,,\ vx \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^iwx^iy \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ eine Darstellung

$$z = uvwxy \text{ mit } |vwx| \leq n\,,\ vx \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^iwx^iy \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Für alle	$\forall L \subseteq \Sigma^*$ mit L kontextfrei
existiert	$\exists n \in \mathbb{N}$
für alle	$\forall z \in L$ mit $\lvert z\rvert > n$
existiert	$\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ mit $z = uvwxy, \lvert vwx\rvert \leq n, vx \neq \varepsilon$
für alle	$\forall i \in \mathbb{N}_0$:
gilt	$uv^iwx^iy \in L$

Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen

Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen.

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ gilt:

Wenn wir in z mindestens n Buchstaben markieren, so existiert eine Darstellung

$$z = uvwxy$$

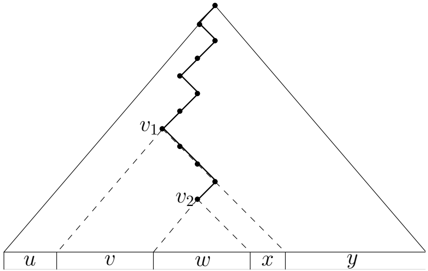
in der von den mindestens n markierten Buchstaben

- höchstens n zu vwx gehören und
- mindestens einer zu vx gehört,

bei der auch $uv^iwx^iy \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

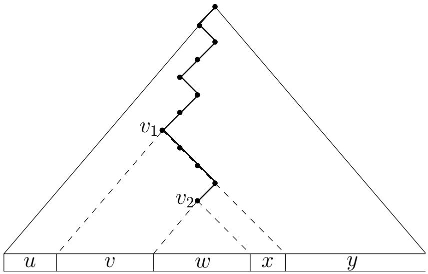
Beweis von Ogden's Lemma

- Sei L kontextfreie Sprache.
- Sei G Grammatik zu L mit Variablen V in Chomsky-Normalform, d.h. alle Regeln sind von der Form $A \to BC$ oder $A \to a$.
- Setze $n := 2^{|V|+1}$.
- Wähle beliebiges Wort $z \in L$ mit $|z| > n$
- Betrachte einen Syntaxbaum T zu z.



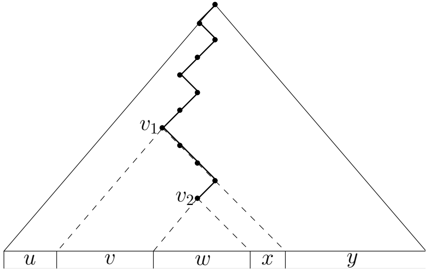
Beweis von Ogden's Lemma

- T hat $|z|$ Blätter, die Vorgänger der Blätter haben 1 Nachfolger und alle weiteren inneren Knoten haben 2 Nachfolger.
- Seien nun mindestens n Blätter markiert.
- Durchlaufe einen Weg von der Wurzel zu einem Blatt wie folgt:
  Wähle stets den Nachfolger, auf dessen Seite die größere Anzahl markierter Blätter liegt.
- Nenne Knoten auf dem Weg, für die rechter und linker Unterbaum markierte Blätter hat, Verzweigungsknoten.



Beweis von Ogden's Lemma

- Wegen $n > 2^{|V|}$ liegen auf dem Weg mindestens $|V| + 1$ Verzweigungsknoten
- Von den letzten $|V| + 1$ Verzweigungsknoten entsprechen mindestens zwei Knoten v_1, v_2 derselben Variablen A.
- Sei vwx das Teilwort von z im Unterbaum von v_1.
- Sei w das Teilwort von z im Unterbaum von v_2.
- Damit sind u und y eindeutig bestimmt.



Beweis von Ogden's Lemma

- Da v_1 Verzweigungsknoten ist, enthält vx mindestens einen markierten Buchstaben.
- Da der Unterbaum von v_1 inkl. v_1 nur $|V| + 1$ Verzweigungsknoten enthält, gibt es in vwx höchstens $2^{|V|+1} = n$ markierte Buchstaben.

- Zu G existieren die Ableitungen

$$S \xrightarrow{*} uAy, \qquad A \xrightarrow{*} vAx, \qquad A \xrightarrow{*} w.$$

Daraus kann z abgeleitet werden durch

$$S \xrightarrow{*} uAy \xrightarrow{*} uvAxy \xrightarrow{*} uvwxy = z,$$

aber auch uv^iwx^iy für jedes $i \geq 1$ durch

$$S \xrightarrow{*} uAy \xrightarrow{*} uvAxy \xrightarrow{*} uv^2Ax^2y \xrightarrow{*} \cdots \rightarrow uv^iAx^iy \rightarrow uv^iwx^iy.$$

Also ist auch $uv^iwx^iy \in L$ für $i \geq 0$.

Bemerkung

Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen.

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ gilt:

Wenn wir in z mindestens n Buchstaben markieren, so existiert eine Darstellung

$$z = uvwxy$$

in der von den mindestens n markierten Buchstaben

- höchstens n zu vwx gehören und
- mindestens einer zu vx gehört,

bei der auch $uv^i wx^i y \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Der Spezialfall von Ogden's Lemma, in dem alle Buchstaben von z markiert sind, ist gerade das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

Übersicht

Chomsky-Hierarchie	**Wortproblem** letzte Vorlesung	**Beispiele** heute
Chomsky-0	semi-entscheidbar NTM akzeptiert	
Chomsky-1 kontextsensitiv	$\mathcal{NP}$-schwer $\mathcal{NTAPE}(n)$	
Chomsky-2 kontextfrei	polynomiell CYK-Algorithmus	
Chomsky-3 regulär	linear DEA	

Echtheit der Chomsky-Hierarchie

Satz.

Die Chomsky-Hierarchie ist echt, d.h.

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0 \ ,$$

wobei $\mathcal{L}_i$, $0 \leq i \leq 3$, die Klasse der durch Typ-i-Grammatiken erzeugten Sprachen bezeichnet.

Beweis:

Teil 1:	Es gibt eine kontextfreie Sprache L,	$\rightsquigarrow L \in \mathcal{L}_2$
	die nicht regulär ist.	$\rightsquigarrow L \notin \mathcal{L}_3$
Teil 2:	Es gibt eine kontextsensitive Sprache L,	$\rightsquigarrow L \in \mathcal{L}_1$
	die nicht kontextfrei ist.	$\rightsquigarrow L \notin \mathcal{L}_2$
Teil 3:	Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache L,	$\rightsquigarrow L \in \mathcal{L}_0$
	die nicht kontextsensitiv ist.	$\rightsquigarrow L \notin \mathcal{L}_1$

Beweis – Teil 1

Es gibt eine kontextfreie Sprache, die nicht regulär ist.

Die Sprache

$$L = \{a^i b^i \mid i \geq 1\}$$

ist kontextfrei und wird durch die Grammatik

$$\begin{aligned} V &= \{S\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ R &= \{S \rightarrow ab \mid aSb\} \ . \end{aligned}$$

erzeugt. Sie ist aber nicht regulär.
(Siehe auch Beispiele zum Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Beweis – Teil 2

Es gibt eine kontextsensitive Sprache, die nicht kontextfrei ist.

Die Sprache

$$L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

ist kontextsensitiv.

Beweis:

- L kontextsensitiv $\Leftrightarrow$ es gibt NTM mit linearem Speicherbedarf für L
- Eingabe $w \in \{a, b, c\}^*$
- Überprüfe deterministisch, ob $w = a^i b^j c^k$
- Überprüfe deterministisch, ob $j = i$ und $k = i$
- Speicherbedarf: $i + j + k$, also linear
- $\Rightarrow L$ kontextsensitiv

Beweis – Teil 2

Es gibt eine kontextsensitive Sprache, die nicht kontextfrei ist.

Die Sprache

$$L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

ist nicht kontextfrei.

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ eine Darstellung

$$z = uvwxy \text{ mit } |vwx| \leq n\,,\ vx \neq \varepsilon,$$

existiert, bei der auch $uv^i wx^i y \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Durch **Widerlegen** der Aussage des Pumping-Lemmas für eine gegebene Sprache L zeigen wir, dass L **nicht kontextfrei** ist.

Beweis – Teil 2

Karlsruher Institut für Technologie

Aussage des kontextfreien Pumping-Lemmas für Sprache L:

$\exists n \quad \forall z \in L, |z| > n \qquad \exists uvwxy = z, |vwx| \leq n, vx \neq \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{N}_0 : \qquad uv^i wx^i y \in L$

Widerlegen der Aussage für Sprache L:

$\forall n \quad \exists z \in L, |z| > n \quad \forall uvwxy = z, |vwx| \leq n, vx \neq \varepsilon \quad \exists i \in \mathbb{N}_0 : \qquad uv^i wx^i y \notin L$

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

- "∀" Betrachte beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- "∃" Wähle $z = a^n b^n c^n$. Beachte: $|z| = 3n > n$ und $z \in L$.
- "∀" Betrachte beliebige Zerlegung $z = uvwxy$, $|vwx| \leq n$, $vx \neq \varepsilon$.
- "∃" Wähle $i = 0$.

Beweis – Teil 2

Widerlegen der Aussage für Sprache L:

$\forall n \quad \exists z \in L, |z| > n \quad \forall uvwxy = z, |vwx| \leq n, vx \neq \varepsilon \quad \exists i \in \mathbb{N}_0 : \quad uv^iwx^iy \notin L$

Die Sprache $L = \{a^ib^ic^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

- "$\forall$" Betrachte beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- "$\exists$" Wähle $z = a^nb^nc^n$. Beachte: $|z| = 3n > n$ und $z \in L$.
- "$\forall$" Betrachte beliebige Zerlegung $z = uvwxy$, $|vwx| \leq n$, $vx \neq \varepsilon$.
- "$\exists$" Wähle $i = 0$.

Fallunterscheidung, Fall 1: vwx enthält kein c

Dann ist $uv^0wx^0y = a^rb^sc^n \notin L$ weil entweder $r < n$ oder $s < n$.

Fallunterscheidung, Fall 2: vwx enthält kein a

Dann ist $uv^0wx^0y = a^nb^rc^s \notin L$ weil entweder $r < n$ oder $s < n$.

Alternativer Beweis mit Ogden's Lemma

Karlsruher Institut für Technologie

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Ogden's Lemma für kontextfreie Sprachen.

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| > n$ gilt:

Wenn wir in z mindestens n Buchstaben markieren, so existiert eine Darstellung

$$z = uvwxy$$

in der von den mindestens n markierten Buchstaben

- höchstens n zu vwx gehören und
- mindestens einer zu vx gehört,

bei der auch $uv^i wx^i y \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Alternativer Beweis mit Ogden's Lemma

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Aussage von Ogden's Lemma für Sprache L:

$\exists n \quad \forall z \in L, |z| > n$, mind. n Markierungen

$\exists uvwxy = z$, vwx höchst. n Markierungen, vx mind. 1 Markierung

$\forall i \in \mathbb{N}_0 : \quad uv^i wx^i y \in L$

Widerlegen der Aussage:

$\forall n \quad \exists z \in L, |z| > n$, mind. n Markierungen

$\forall uvwxy = z$, vwx höchst. n Markierungen, vx mind. 1 Markierung

$\exists i \in \mathbb{N}_0 : \quad uv^i wx^i y \notin L$

Alternativer Beweis mit Ogden's Lemma

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Widerlegen der Aussage:

$\forall n \quad \exists z \in L, |z| > n$, mind. n Markierungen
$\forall uvwxy = z$, vwx höchst. n Markierungen, vx mind. 1 Markierung
$\exists i \in \mathbb{N}_0 : \quad uv^i wx^i y \notin L$

"∀" Betrachte beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
"∃" Wähle $z = a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1}$ und markiere alle b.
(Beachte: $|z| > n$, $z \in L$, mind. n Markierungen.)
"∀" Betrachte beliebige Zerlegung $z = uvwxy$, so dass
vwx höchst. n Markierungen, vx mind. 1 Markierung hat.
"∃" Wähle $i = 0$.
Da vwx kein a oder kein c hat, gilt $uv^0 wx^0 y \notin L$

Echtheit der Chomsky-Hierarchie

Satz.

Die Chomsky-Hierarchie ist echt, d.h.

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0 \ ,$$

wobei $\mathcal{L}_i$, $0 \leq i \leq 3$, die Klasse der durch Typ-i-Grammatiken erzeugten Sprachen bezeichnet.

Beweis:

Teil 1:	Es gibt eine kontextfreie Sprache L,	$\rightsquigarrow L \in \mathcal{L}_2$
	die nicht regulär ist.	$\rightsquigarrow L \notin \mathcal{L}_3$
Teil 2:	Es gibt eine kontextsensitive Sprache L,	$\rightsquigarrow L \in \mathcal{L}_1$
	die nicht kontextfrei ist.	$\rightsquigarrow L \notin \mathcal{L}_2$
Teil 3:	Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache L,	$\rightsquigarrow L \in \mathcal{L}_0$
	die nicht kontextsensitiv ist.	$\rightsquigarrow L \notin \mathcal{L}_1$

Beweis – Teil 3

Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache, die nicht kontextsensitiv ist.

Es sei L_u die universelle Sprache.

Wiederholung.

Die universelle Sprache L_u über $\{0, 1\}$ ist definiert durch

$$L_u := \{w\#v\colon\ v \in L(T_w)\}.$$

L_u ist also die Menge aller Wörter $w\#v$ für die die DTM T_w bei der Eingabe v hält und v akzeptiert.

Beweis – Teil 3

Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache, die nicht kontextsensitiv ist.

Es sei L_u die universelle Sprache.

- Kapitel 3: L_u ist semi-entscheidbar (aber nicht entscheidbar).
- Wegen der Semi-entscheidbarkeit gilt $L_u \in \mathcal{L}_0$.
- **Da alle Sprachen in $\mathcal{L}_1$ entscheidbar sind, gilt $L_u \notin \mathcal{L}_1$**

Beweis – Teil 3

Es gibt eine semi-entscheidbare Sprache, die nicht kontextsensitiv ist.

Es sei L_u die universelle Sprache.

- Kapitel 3: L_u ist semi-entscheidbar (aber nicht entscheidbar).
- Wegen der Semi-entscheidbarkeit gilt $L_u \in \mathcal{L}_0$.
- **Da alle Sprachen in $\mathcal{L}_1$ entscheidbar sind, gilt $L_u \notin \mathcal{L}_1$**
- Sei L eine Sprache in $\mathcal{L}_1$. (Zum Beispiel $L = L_u$.)
- Dann gibt es eine NTM, die L mit linearem Speicher akzeptiert.
- Diese kann durch eine DTM simuliert werden.
- Mit beschränktem Speicher können nur endlich viele verschiedene Konfigurationen auftreten.
- Dann können Endlosschleifen erkannt werden.
- $\Longrightarrow$ Sprache L kann sogar entschieden werden.

Übersicht

Chomsky-Hierarchie	**Wortproblem** letzte Vorlesung	**Beispiele** heute
Chomsky-0	semi-entscheidbar NTM akzeptiert	universelle Sprache
Chomsky-1 kontextsensitiv	$\mathcal{NP}$-schwer $\mathcal{NTAPE}(n)$	$L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$
Chomsky-2 kontextfrei	polynomiell CYK-Algorithmus	$L = \{a^i b^i \mid i \geq 1\}$
Chomsky-3 regulär	linear DEA	$L = \{a^i \mid i \geq 1\}$

Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz.

Für eine kontextfreie Grammatik G kann in polynomieller Zeit entschieden werden, ob $L(G) = \emptyset$ ist.

Bemerkung: Für Chomsky-0 Grammatiken ist das nicht entscheidbar.

Satz.

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleene'schem Abschluss.

Testen Sie sich: Für welche Sprachen gilt das auch?

Semi-entscheidbare Sprachen?	Entscheidbare Sprachen?
Kontextsensitive Sprachen?	Reguläre Sprachen?

Nutzlose Variablen

Karlsruher Institut für Technologie

Definition.

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Eine Variable A heißt nutzlos, falls es keine Ableitung $S \xrightarrow{*} w$ gibt, $w \in \Sigma^*$, in der A vorkommt.

Satz.

Für eine kontextfreie Grammatik kann die Menge der nutzlosen Variablen (in polynomialer Zeit) berechnet werden.

Beweis:

- Wir benutzen ein zweistufiges Verfahren.

Schritt 1

Bestimme alle Variablen, die ein Wort erzeugen können

Formal: Berechne $V' = \{A \in V \mid \exists w \in \Sigma^* : A \xrightarrow{*} w\}$

- Initialisiere eine leere Queue Q.
- Füge alle $A \in V$ mit $A \longrightarrow w$ für ein $w \in \Sigma^*$ in Q und V' ein.
- Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q
  - Ersetze jede Regel
    $$B \longrightarrow \alpha A \beta \text{ mit } \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$$
    durch die Regeln
    $$B \longrightarrow \alpha w \beta, \text{ wobei } w \in \Sigma^* \text{ und } A \longrightarrow w \text{ Regel.}$$
  - Wenn dabei eine Regel der Form
    $$B \longrightarrow w', w' \in \Sigma^*,$$
    entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.
- Das Verfahren endet, wenn Q leer ist.

Schritt 1

Bestimme alle Variablen, die ein Wort erzeugen können

Formal: Berechne $V' = \{A \in V \mid \exists w \in \Sigma^* : A \xrightarrow{*} w\}$

Bemerkung 1

- Falls $S \notin V'$, breche das Verfahren ab (kein Schritt 2).
- G erzeugt dann die leere Sprache und alle Variablen sind nutzlos.

Bemerkung 2

- Für jede Variable A mit $A \xrightarrow{*} w$ für ein $w \in \Sigma^*$ gilt:
- Per Induktion über die Länge der kürzesten Ableitungsregel der Form $A \xrightarrow{*} w$ kann für A gezeigt werden, dass $A \in V'$.

Beispiel: Schritt 1

Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit Produktionen R gegeben durch

$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow Aa \,|\, B \,|\, Cab \\
A &\longrightarrow bc \,|\, A \\
B &\longrightarrow Bd \,|\, Cd \\
C &\longrightarrow aBc \\
D &\longrightarrow Ab \\
E &\longrightarrow SD
\end{aligned}
$$

Beispiel: Schritt 1

Füge alle $A \in V$ mit $A \rightarrow w$ für ein $w \in \Sigma^*$ in Q und V' ein.

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & Aa \mid B \mid Cab \\ A & \rightarrow & bc \mid A \\ B & \rightarrow & Bd \mid Cd \\ C & \rightarrow & aBc \\ D & \rightarrow & Ab \\ E & \rightarrow & SD \\ \\ V' & = & \emptyset \\ Q & = & \emptyset \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & Aa \mid B \mid Cab \\ A & \rightarrow & bc \mid A \\ B & \rightarrow & Bd \mid Cd \\ C & \rightarrow & aBc \\ D & \rightarrow & Ab \\ E & \rightarrow & SD \\ \\ V' & = & \{A\} \\ Q & = & \{A\} \end{array}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \longrightarrow \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \longrightarrow \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \longrightarrow w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \longrightarrow w'$, $w' \in \Sigma^*$, entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & Aa \mid B \mid Cab \\ A & \longrightarrow & bc \mid A \\ B & \longrightarrow & Bd \mid Cd \\ C & \longrightarrow & aBc \\ D & \longrightarrow & Ab \\ E & \longrightarrow & SD \\ \\ V' & = & \{A\} \\ Q & = & \{A\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & \color{red}{bc}a \mid B \mid Cab \\ A & \longrightarrow & bc \mid A \\ B & \longrightarrow & Bd \mid Cd \\ C & \longrightarrow & aBc \\ D & \longrightarrow & \color{red}{bc}b \\ E & \longrightarrow & SD \\ \\ V' & = & \{A, \color{red}{S}, \color{red}{D}\} \\ Q & = & \{S, D\} \end{array}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \longrightarrow \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \longrightarrow \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \longrightarrow w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \longrightarrow w'$, $w' \in \Sigma^*$, entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$\begin{array}{lll} S & \longrightarrow & bca \mid B \mid Cab \\ A & \longrightarrow & bc \mid A \\ B & \longrightarrow & Bd \mid Cd \\ C & \longrightarrow & aBc \\ D & \longrightarrow & bcb \\ E & \longrightarrow & SD \\ \\ V' & = & \{A, S, D\} \\ Q & = & \{S, D\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} S & \longrightarrow & bca \mid B \mid Cab \\ A & \longrightarrow & bc \mid A \\ B & \longrightarrow & Bd \mid Cd \\ C & \longrightarrow & aBc \\ D & \longrightarrow & bcb \\ E & \longrightarrow & bcaD \\ \\ V' & = & \{A, S, D\} \\ Q & = & \{D\} \end{array}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \longrightarrow \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \longrightarrow \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \longrightarrow w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \longrightarrow w'$, $w' \in \Sigma^*$, entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow bca \mid B \mid Cab \\
A &\longrightarrow bc \mid A \\
B &\longrightarrow Bd \mid Cd \\
C &\longrightarrow aBc \\
D &\longrightarrow bcb \\
E &\longrightarrow bcaD
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
S &\longrightarrow bca \mid B \mid Cab \\
A &\longrightarrow bc \mid A \\
B &\longrightarrow Bd \mid Cd \\
C &\longrightarrow aBc \\
D &\longrightarrow bcb \\
E &\longrightarrow bca\color{red}{bcb}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V' &= \{A, S, D\} \\
Q &= \{D\}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
V' &= \{A, S, D, \color{red}{E}\} \\
Q &= \{\color{red}{E}\}
\end{aligned}
$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \longrightarrow \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \longrightarrow \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \longrightarrow w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \longrightarrow w'$, $w' \in \Sigma^*$, entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & bca \mid B \mid Cab \\ A & \longrightarrow & bc \mid A \\ B & \longrightarrow & Bd \mid Cd \\ C & \longrightarrow & aBc \\ D & \longrightarrow & bcb \\ E & \longrightarrow & bcabcb \\ \\ V' & = & \{A, S, D, E\} \\ Q & = & \{E\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & bca \mid B \mid Cab \\ A & \longrightarrow & bc \mid A \\ B & \longrightarrow & Bd \mid Cd \\ C & \longrightarrow & aBc \\ D & \longrightarrow & bcb \\ E & \longrightarrow & bcabcb \\ \\ V' & = & \{A, S, D, E\} \\ Q & = & \{\} \end{array}$$

Schritt 2

Bestimme alle Variablen in V', die vom Startsymbol aus "erreicht" werden können.

Formal: Berechne $V'' = \{A \in V' \mid S = A$ oder $\exists \alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^* \colon S \xrightarrow{*} \alpha A \beta\}$.

- Starte mit $V'' = \{S\}$.
- Füge zu allen Regeln $A \to \alpha B \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, $A \in V''$, $B \in V'$ die Variable B in V'' ein.
- Wiederhole den letzten Schritt, bis sich V'' nicht mehr ändert.

Per Induktion über die Länge der kürzesten Ableitungsregel der Form $S \to \alpha A \beta$, $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, kann dann wieder die Korrektheit bewiesen werden.

Fazit: Nach Ende von Schritt 2 ist V'' die Menge aller nützlichen Variablen.

Beispiel: Schritt 2

- **Starte mit $V'' = \{S\}$.**

$$
\begin{array}{rcl}
S & \longrightarrow & Aa \mid B \mid Cab \\
A & \longrightarrow & bc \mid A \\
B & \longrightarrow & Bd \mid Cd \\
C & \longrightarrow & aBc \\
D & \longrightarrow & Ab \\
E & \longrightarrow & SD \\
\\
V' & = & \{A, S, D, E\} \\
V'' & = & \{\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
S & \longrightarrow & Aa \mid B \mid Cab \\
A & \longrightarrow & bc \mid A \\
B & \longrightarrow & Bd \mid Cd \\
C & \longrightarrow & aBc \\
D & \longrightarrow & Ab \\
E & \longrightarrow & SD \\
\\
V' & = & \{A, S, D, E\} \\
V'' & = & \{S\}
\end{array}
$$

Beispiel: Schritt 2

- **Starte mit $V'' = \{S\}$.**
- **Füge zu allen Regeln $A \longrightarrow \alpha B \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, $A \in V''$, $B \in V'$ die Variable B in V'' ein.**

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow Aa \mid B \mid Cab \\ A &\longrightarrow bc \mid A \\ B &\longrightarrow Bd \mid Cd \\ C &\longrightarrow aBc \\ D &\longrightarrow Ab \\ E &\longrightarrow SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D, E\} \\ V'' &= \{S\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow Aa \mid B \mid Cab \\ A &\longrightarrow bc \mid A \\ B &\longrightarrow Bd \mid Cd \\ C &\longrightarrow aBc \\ D &\longrightarrow Ab \\ E &\longrightarrow SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D, E\} \\ V'' &= \{S, A\} \end{aligned}$$

Beispiel: Schritt 2

- **Starte mit $V'' = \{S\}$.**
- **Füge zu allen Regeln $A \longrightarrow \alpha B \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, $A \in V''$, $B \in V'$ die Variable B in V'' ein. Wiederhole bis sich V'' nicht mehr ändert.**

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow Aa \mid B \mid Cab \\ A &\longrightarrow bc \mid A \\ B &\longrightarrow Bd \mid Cd \\ C &\longrightarrow aBc \\ D &\longrightarrow Ab \\ E &\longrightarrow SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D, E\} \\ V'' &= \{S, A\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow Aa \mid B \mid Cab \\ A &\longrightarrow bc \mid A \\ B &\longrightarrow Bd \mid Cd \\ C &\longrightarrow aBc \\ D &\longrightarrow Ab \\ E &\longrightarrow SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D, E\} \\ V'' &= \{S, A\} \end{aligned}$$

Leere kontextfreie Sprachen

Korollar.

Für eine kontextfreie Grammatik G kann (in polynomialer Zeit) entschieden werden, ob $L(G) = \emptyset$ ist.

Beweis:

- $L(G) = \emptyset$ genau dann, wenn S nutzlos.

Endliche kontextfreie Sprachen

Satz.

Für kontextfreie Grammatiken G kann in polynomialer Zeit entschieden werden, ob $L(G)$ endlich ist.

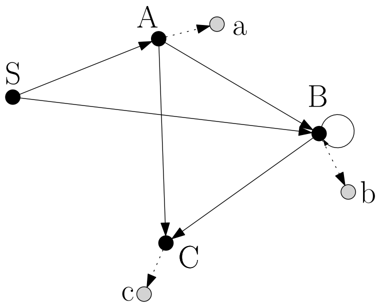
Beweis:

- Entferne alle nutzlosen Variablen.
- Überführe G in eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform.
- Betrachte den gerichteten Graphen (V, E) mit
  - $V =$ die Variablenmenge von G
  - $E = \{(A, B) \mid \exists C \in V : A \to BC \in R \vee A \to CB \in R\}$
- Mit Tiefensuche kann entschieden werden, ob dieser Graph einen gerichteten Kreis enthält.
- Man kann sich leicht überlegen, dass $L(G)$ genau dann endlich ist, wenn der entsprechende Graph keinen gerichteten Kreis enthält.

Beispielgraph

- Betrachte den gerichteten Graphen (V, E) mit
  - V = die Variablenmenge von G
  - $E = \{(A, B) \mid \exists C \in V\colon A \to BC \in R \vee A \to CB \in R\}$

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & AB \\ A & \longrightarrow & BC \\ B & \longrightarrow & BC \\ A & \longrightarrow & a \\ B & \longrightarrow & b \\ C & \longrightarrow & c \end{array}$$



weitere Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz.

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleene'schem Abschluss.

Beweis:

- Seien L_1 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$.
- Seien L_2 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$.
- O.B.d.A. sei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Vereinigung: Die Grammatik

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2 \cup \{S\} \\ S & \quad \text{neues Startsymbol} \\ R &= R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\} \end{aligned}$$

erzeugt $L_1 \cup L_2$.

weitere Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz.

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleene'schem Abschluss.

Beweis:

- Seien L_1 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$.
- Seien L_2 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$.
- O.B.d.A. sei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Konkatenation: Die Grammatik

$$\begin{array}{lcl} V & = & V_1 \cup V_2 \cup \{S\} \\ S & & \text{neues Startsymbol} \\ R & = & R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\} \end{array}$$

erzeugt $L_1 \cdot L_2$.

weitere Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz.

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleene'schem Abschluss.

Beweis:

- Seien L_1 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$.
- Seien L_2 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$.
- O.B.d.A. sei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Kleene'scher Abschluss: Die Grammatik

$$\begin{array}{lcl} V & = & V_1 \cup \{S\} \\ S & & \text{neues Startsymbol} \\ R & = & R_1 \cup \{S \to \varepsilon, S \to SS, S \to S_1\} \end{array}$$

erzeugt L_1^*.

weitere Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz.

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen bzgl. Komplementbildung und Durchschnitt.

Beweis:

Schnitt: Betrachte die kontextfreien Sprachen

$$L_1 = \{a^i b^i \mid i \geq 1\} \qquad L_2 = \{c\}^*$$

$$L_3 = \{a\}^* \qquad L_4 = \{b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

Nach dem letzten Satz sind dann auch $L_1 \cdot L_2$ und $L_3 \cdot L_4$ kontextfrei.

Es ist dann

$$L := L_1 L_2 \cap L_3 L_4 = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}.$$

Diese Sprache ist nicht kontextfrei.

weitere Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Karlsruher Institut für Technologie

Satz.

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen bzgl. Komplementbildung und Durchschnitt.

Beweis:

Komplementbildung:

- Angenommen, die Klasse der kontextfreien Sprachen wäre bzgl. Komplementbildung abgeschlossen.
- Dann würde für beliebige kontextfreie Sprachen L_1, L_2 gelten $(L_1^c \cup L_2^c)^c = L_1 \cap L_2$ ist wieder kontextfrei.
- Dies ist ein Widerspruch zur ersten Aussage des Satzes.